

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ریاضیات جدید

سال چهارم

آموزش متوسطهٔ عمومی - ریاضی و فیزیک ۲۹۶

$$(p \Rightarrow q) \equiv (q \vee \sim p)$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} N'$$

ریاضیات جدید

سال چهارم

آموزش متوسطه عمومی

ریاضی و فیزیک

مؤلفان ● غلامرضا دانش ناروئی ● میرزا جلیلی

صفحه پرداز آزاده اصغری نسب انور

رسام خسرو مدیریان

چاپ از چاپ بهرام

۱۳۶۷



تهران ــ کیلومتر ۱۵ جاده مخصوص کرج
خیابان داروپخش ــ تلفن: ۲ ــ ۹۳۱۱۵۱



فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

فصل اول

منطق ریاضی (یادآوری و تکمیل)

در کتاب ریاضیات جدید سال اول با زبان ریاضی آشنا شدید و دیدید که منطق ریاضی دستورزبان ریاضی و یامطالعهٔ ساختمان انواع جمله‌هائی است که در ریاضی بکاربرده می‌شوند. با فراگیری این زبان بسیار دقیق مـا توانائی خود را دررساندن ایده‌ها به دیگران و یاگرفتن اطلاعات از دیگران افزایش می‌دهیم. البته برای ساختن زبان ریاضی، بناچار از زبان روزمره که گاهی نیزگیج‌کننده و نارساست استفاده می‌کنیم.

در این فصل کتاب، ضمن یادآوری مختصر از آنچه در سال اول دیده‌اید می‌خواهیم با استفاده از دستورهای ساده‌ای از یک دسته گزاره‌های مفروض به یک گزاره دیگر برسیم و مبحث استنتاج را مورد مطالعه قرار دهیم.

جمله‌هائی که در ریاضی بکار می‌روند جمله‌هـای خبری هستندکه یـا درست یا نادرست می‌باشند و آنها راگزاره می‌نامیم: انتقال نظریات واطلاعات با کمک گزاره‌ها صورت می‌گیرد و استنتاج ما ناشی ازترکیبهای منطقی این گزاره‌ها می‌باشد.

ترکیبهای منطقی و رابطها

بمنظور تعمیم وکلیت دادن به بحثهای ریاضی ازحروف الفبای لاتین، p ، q ، r... ، p_1 ، q_1 ، ... r_1 ، برای نمایش گزاره استفاده کرده جملات زبان ریاضی را بصورت فرمول می‌نویسیم. چون در نوشتن، فرمولها را از سمت چپ می‌نویسیم برای ترکیب این حـروف از نمادهای ویژه زیر استفاده می‌کنیم:

نماد «$\wedge$» یا & برای نمایش «و» که آنرا عاطف می‌نامیم.

نماد «$\vee$» برای نمایش «یا» که آنرا فاصل می‌خوانیم.

نماد «$\sim$» یا «$-$» برای بیان «چنین نیست که» وآنرا ناقض می‌نامیم.

نماد «$\Longrightarrow$» برای نمایش جمله‌های شرطی زبان ریاضی و بیان اگر، آنگاه.

نماد «$\Longleftrightarrow$» برای نمایش جمله‌های دوشرطی و بیان اگر، آنگاه و برعکس.

اکنون بامجموعهٔ حروف الفباء و نمادهای فوق ترکیبهای منطقی را می‌سازیم:

تعریف ــ گزاره مرکب (ترکیب منطقی) گزاره‌ای است که از پهلوی هم نوشتن

تعدادی با پایان از گزاره‌ها و رابطه‌ها، طبق قواعد معینی، به‌دست می‌آید. برای نمایش ترکیب‌های منطقی از حروف بزرگ الفبا استفاده می‌کنند.

نقیض گزارهٔ p، گزاره $\sim p$ است که نادرست خواهدبود هرگاه p درست باشد. و درست است هرگاه p نادرست باشد.

ترکیب عطفی دوگزاره p، q گزاره $p \wedge q$ است که بنابه‌تعریف درست است هرگاه p و q با هم درست باشد و درغیراینصورت نادرست می‌باشد.

ترکیب فصلی دوگزاره p، q گزاره $p \vee q$ است که بنابه‌تعریف درست‌است هرگاه حداقل یکی ازاین‌گزاره‌ها درست باشد و درغیراینصورت نادرست می‌باشد.

ترکیب شرطی دوگزاره p، q گزاره $p \Longrightarrow q$ است که بنابه‌تعریف نادرست است هرگاه p درست و q نادرست باشد و درغیراینصورت درست است.

گزاره شرطی اگر p آنگاه q اگرهمیشه درست باشد به صورتهای زیر نیز بیان میشود.

- p نتیجه می‌دهد q را.
- q اگر p.
- q شرط لازم برای p است.
- p شرط کافی برای q است.
- شرط لازم برای p آن است که q.
- شرط کافی برای q آن است که p.

ترکیب دوشرطی دوگزاره p، q گزاره $p \Longleftrightarrow q$ است که بنابه‌تعریف درست است هرگاه p و q باهم درست یا باهم نادرست باشند و در غیراینصورت نادرست می‌باشد.

گزاره دو شرطی $p \Longleftrightarrow q$ اگر همیشه درست باشد به صورتهای زیر بیان می‌شود.

- اگر p آنگاه q وبالعکس.
- p اگر و فقط اگر q یا q اگر و فقط اگر p.
- p شرط لازم و کافی است برای q.
- q شرط لازم وکافی است برای p.

عکس ترکیب شرطی: اگر در گزاره شرطی $p \Longrightarrow q$ جای p و q را عوض کنیم، گزارهٔ شرطی $q \Longrightarrow p$ به‌دست می‌آید، که‌آن راعکس‌گزاره شرطی $p \Longrightarrow q$ می‌خوانند درستی یا نادرستی $q \Longrightarrow p$ به‌درستی یا نادرستی $p \Longrightarrow q$ بستگی ندارد.

عکس نقیض ترکیب شرطی: ازگزاره شرطی $p \Longrightarrow q$، گزاره شرطی $\sim q \Longrightarrow \sim p$ به‌دست می‌آید که آنرا عکس نقیض‌گزاره $p \Longrightarrow q$ می‌نامند که ارزش‌آن باارزش $p \Longrightarrow q$ یکسان می‌باشد.

در ترکیبهای بالا، هریک از گزاره‌های p یا q را مؤلفه (یا همنه) ترکیب می‌خوانند و در گزارهٔ شرطی p را مقدم و q را تالی می‌نامند.

چند مثال

۱ـ گزاره «اگر a عددی فرد باشد، آن‌گاه a^2 عددی است فرد»، یك گزارهٔ شرطی است. عکس و عکس نقیض این گزاره به‌ترتیب عبارتند از «اگر a^2 عددی فرد باشد، آنگاه a عددی است فرد» و «اگر a^2 عددی فرد نباشد، آنگاه a فرد نیست».

۲ـ گزارهٔ «اگر $a=b$، آنگاه $a^2=b^2$»، یك گزارهٔ شرطی‌است. عکس وعکس نقیض این گزاره به‌ترتیب عبارتند از«اگر $a^2=b^2$، آنگاه $a=b$» و «اگر $a^2\neq b^2$، آنگاه $a\neq b$».

۳ـ گزارهٔ «اگر $a<b$، آنگاه $-b<-a$ واگر $-b<-a$، آنگاه $a<b$»، یك گزارهٔ دوشرطی است.

گزاره‌های همیشه درست

به‌گزارهٔ زیر توجه‌کنید:

«دوم بهمن ۱۳۸۰ یا روز جمعه است یا نیست» (۱)

درستی این جمله بستگی به‌درستی مؤلفه‌های (همنه‌های) آن ندارد. بدین معنا که خواه روز دوم بهمن ۱۳۸۰ جمعه باشد خواه نباشد، گزارهٔ فوق درست است.

تعریف ـ گزارهٔ مرکب Q یك‌گزارهٔ همیشه درست‌است هرگاه ارزش‌آن، مستقل از ارزش مؤلفه‌هایش، همیشه درست‌باشد. روشن است‌که اگر Q همیشه درست باشد $\sim Q$ همیشه نادرست است.

گزاره‌هائی نظیر (۱)که درحالت‌کلی به صورت $p\vee\sim p$ نوشته می‌شود مثالی ازیك گزارهٔ همیشه درست‌است وگزارهٔ $p\wedge\sim p$ مثالی ازگزارهٔ همیشه نادرست‌است. (دوم بهمن ۱۳۸۰روز جمعه است و نیست).

ازمطالب گفته شده نتیجه می‌شودکه:

ـ اگرهریك ازگزاره‌های P یا Q همیشه درست باشد، آنگاه $P\vee Q$ همیشه درست است همچنین $P\vee Q\vee\ldots\vee R$ گزاره همیشه درست است هرگاه اقلا یکی ازهمنه‌های آن همیشه درست باشد.

ـ اگرگزاره‌های P و Q باهم همیشه درست باشند، آنگاه $P\wedge Q$ گزاره همیشه درست است وبرعکس.

ـ اگر $P\wedge Q$ همیشه درست باشند، آنگاه $P\vee Q$ گزاره همیشه درست است.

- اگر P و Q گزاره‌های همیشه درست باشند ، آنگاه $P \Rightarrow Q$ و $Q \Leftrightarrow P$ نیز گزاره‌های همیشه درست است .

- اگر P گزاره همیشه نادرست باشد ، آنگاه $P \Rightarrow Q$ گزاره همیشه درست است .

- گزارهٔ همیشه درست را با T وگزارهٔ همیشه نادرست را با F نمایش می‌دهیم .

تعریف - دریك‌شاخه ریاضی، قضیه گزاره‌ای است که ازاصول آن شاخهٔ ریاضی نتیجه شده و درستی آن با برهان بیان می‌شود . می‌توان ثابت کرد یك قضیه ، گزاره همیشه درست است .

قضایای شرطی و دو شرطی

هرگاه x و y اعداد حقیقی باشند ، ارزش گزاره « اگر $x>y$ ، آنگاه $2x>2y$ » بستگی به متغیرهای x و y نداشته و گزاره همیشه درست است . زیرا ، تنها موردی که ارزش این گزاره نادرست است وقتی است که $x>y$ ولی $2x \not> 2y$. اما درجبر خوانده‌ایم اگر نامساوی $x>y$ برقرار باشد آنگاه بنابرخاصیت نامساویها ، $2x>2y$ نیز برقرار است . بعبارت دیگر درگزارهٔ شرطی[1] « $x>y \Rightarrow 2x>2y$ » اگرمقدم درست باشد میتوان با استفاده ازویژگیهای نامساویها ، درستی تالی را نتیجه گرفت . این گزارهٔ شرطی یك استلزام منطقی یا یك قضیه است .

تعریف - یك استلزام منطقی یك گزارهٔ شرطی همیشه درست است .

ازتعریف نتیجه می‌شود که یك استلزام یك گزارهٔ شرطی است ولی یك گزارهٔ شرطی لزوم ندارد که یك استلزام باشد .

قضایای ریاضی بیشتربه‌صورت استلزام منطقی بیان شده بنام قضایای شرطی خوانده می‌شوند .

- اگر دو زاویه قائمه باشند ، آنگاه متساویند.
- اگر دو مثلث متساوی باشند ، آنگاه متشابهند .
- اگریکعدد طبیعی به صورت $n(n-1)(n-2)$ باشد، آنگاه این عدد بر ۶ بخش‌پذیر است
- اگر $x<y$ ، آنگاه $-y<-x$.
- اگر $A \subset B$ ، آنگاه $A \cap B = A$.

تعریف - اگرعکس یك استلزام منطقی خود استلزام منطقی باشد (در حالت کلی نیست) ، آنگاه آن استلزام منطقی یك قضیه دوشرطی خوانده می‌شود .

۱- $x>y \Rightarrow 2x>2y$ گزاره نمانیست و گزاره سوری همیشه درست است که دراینجا از نوشتن نماد سور خودداری شده است

دومثال آخر ازمثالهای بالا ، دارای این ویژگی است . یعنی قضایای دوشرطی میباشند . این قضایا معمولا به‌صورت شرط لازم وکافی بیان می‌شوند .

ـ شرط لازم و کافی برای آنکه درمثلث قائم‌الزاویه‌ای طول یك ضلع برابر نصف طول وتر باشد ، آنست که اندازه زاویهٔ روبروی به‌آن ضلع $30°$ باشد.

ـ شرط لازم و کافی برای‌آنکه نقطه‌ای داخل دایره باشد ، آنست که فاصلهٔ آن تا مرکز دایره ازشعاع کوچکتر باشد .

ـ هرگاه $U \subset V$ ، شرط لازم و کافی برای آنکه U زیر فضای V باشد ، آنست که U نسبت به‌عمل جمع وضرب اسکالر بسته باشد . ($U \neq \varnothing$)

ـ درحالت کلی اگر $P \Leftrightarrow Q$ ، قضیه دو شرطی باشد ، گوئیم شرط لازم و کافی برای Q آنست که P .

دو ترکیب منطقی هم‌ارز (معادل یا تساوی منطقی)

دوترکیب منطقی P و Q را هم‌ارز خوانند هرگاه همواره ارزشهای یکسان داشته باشند ، بعبارت دیگر ، P و Q هم ارزند هرگاه ، اگر یکسی درست باشد دیگری نیز درست باشد و اگر یکی نادرست باشد دیگری هم نادرست باشد . دوگـزارهٔ هم‌ارز P و Q را به‌صورت $P \equiv Q$ نشان می‌دهند . اگر P و Q هم‌ارز نباشند می‌نویسیم : $P \not\equiv Q$.

بدیهی است که اگر P و Q هم‌ارز باشند آنگاه $P \Leftrightarrow Q$ یك گـزاره همیشه درست است . بعبارت دیگر ، هرقضیهٔ دوشرطی از دوگزارهٔ هم‌ارز تشکیل شده است . مثلا :

ـ $A \subset B$ ، هم‌ارز با $A \cap B' = \varnothing$ می‌باشد.

ـ $2x = 2y$ ، هم‌ارز با $x = y$ می‌باشد .

ـ درفضای برداری ، $r v = \overline{0}$ هم‌ارز است با «$r = 0$ یا $v = \overline{0}$» . r عدد و v بردار است .

ازاین مطالب نتیجه می‌شود که :

ـ هرهم‌ارزی یك قضیهٔ دوشرطی است .

ـ هر هم‌ارزی یك‌گزارهٔ دوشرطی است ولی هرگزاره دوشرطی هم‌ارزی نیست.

ـ اگر P و Q گزاره‌های همیشه درست یا هردوهمیشه نادرست باشند داریم $P \equiv Q$.

ـ از $P \equiv Q$ نتیجه می‌شود $\sim P \equiv \sim Q$.

ـ رابطهٔ «$\equiv$» یك رابطهٔ هم‌ارزی است .

هم‌ارزی منطقی درحقیقت یك نوع تساوی منطقی بین گـزاره‌های مرکب است . بسیار اتفاق می‌افتد که هم‌ارز یك ترکیب منطقی ازخود آن ساده‌تر و درك آن‌آسانتراست . بنابراین

شناختن ترکیبهای منطقی هم‌ارز در استدلال بسیار سودمند است. ما در زیر چند تعریف و چند قضیه را می‌آوریم:

نقیض نقیض – با تشکیل جدول درستی p و $\sim(\sim p)$ دیده می‌شود که این دو گزاره هم‌ارزشند:

$$\sim(\sim p)\equiv p$$

یعنی، **نقیض نقیض یک گزاره باخود گزاره هم‌ارز است.**

ترکیب هم‌ارز باگزارهٔ شرطی – باتشکیل جدول درستی $p\Rightarrow q$ و $q\vee\sim p$ دیده می‌شود که این دو گزاره هم‌ارزند، یعنی: هر گزارهٔ شرطی هم‌ارز است با ترکیب فصلی تالی و نقیض مقدم آن.

$$(p\Rightarrow q)\equiv(q\vee\sim p)$$

ترکیب هم‌ارز گزارهٔ دوشرطی – با تشکیل جدولهای درستی $p\Leftrightarrow q$ و گزاره $(p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)$ دیده می‌شود که این دو گزاره هم‌ارزند.

$$(p\Leftrightarrow q)\equiv(p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)$$

همچنین داریم:

$$p\vee q\equiv q\vee p$$

$$p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r$$

$$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$$

که همان بیان قوانین جابجایی، شرکت پذیری $\vee$ و پخشی $\vee$ بر $\wedge$ است.

بعضی از هم‌ارزیها تحت عنوان قضیه ذکر می‌شوند:

قضیهٔ ۱– هر گزاره شرطی هم‌ارز است باعکس نقیض خودش، یعنی:

$$(p\Rightarrow q)\equiv(\sim q\Rightarrow\sim p)$$

برهان – دربالا دیدیم که:

$$(p\Rightarrow q)\equiv(q\vee\sim p)\qquad(۱)$$

درنتیجه:

$$(\sim q\Rightarrow\sim p)\equiv(\sim p\vee\sim(\sim q))$$

$$\equiv(\sim p\vee q)$$

$$(\sim q\Rightarrow\sim p)\equiv(q\vee\sim p)\qquad(۲)$$

با مقایسهٔ (۱) و (۲) وتوجه به‌خاصیت‌های جابجائی و تعدی تساوی منطقی نتیجه می‌شود.

$$(p\Rightarrow q)\equiv\sim q\Rightarrow\sim p$$

مثال – ثابت کنید برای هر x متعلق به‌مجموعهٔ اعداد درست داریم:

اگر x^2 فرد باشد، آنگاه x فرد است.

بجای اثبات درستی گزاره فوق ، درستی عکس نقیض آنرا ثابت می‌کنیم . اگر x فرد نباشد ، آنگاه $x^۲$ فرد نیست برای این منظور ، گوئیم اگر x فرد نباشد ، پس زوج است یعنی : $x=۲k$ و یا $x^۲=۴k^۲$ و یا $x^۲=۲(۲k^۲)$ واین تساوی مبین این است که $x^۲$ فرد نیست .

قضیهٔ ۲ـ قانون دمورگان ، برای هردوگزاره p و q داریم :

الف ـ $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$

ب ـ $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$

برهان ـ اثبات درستی الف و ب نظیرهم بوده ، در اینجا فقط الف را ثابت می‌کنیم . اگر p و q درست باشد ، آنگاه طبق تعریف گزاره عطفی ، $p\wedge q$ درست بوده درنتیجه نقیض آن یعنی $\sim(p\wedge q)$ **نادرست می‌باشد**. اما اگر p و q درست باشد، آنگاه طبق تعریف نقیض، $\sim p$ و $\sim q$ نادرست بوده وترکیب فصلی آنها یعنی $\sim p\vee\sim q$ نیزنادرست است درنتیجه دو ترکیب منطقی $\sim(p\wedge q)$ و $\sim p\vee\sim q$ هم ارزش هستند. برای حالات دیگر p و q نیز ، هم ارزش بودن دوترکیب فوق به‌همین ترتیب ثابت می‌شود و هم‌ارزی الف درست است.

مثال ۱ـ می‌دانیم که اگر عدد حقیقی a ، بزرگتر یا مساوی ۱ نباشد حتماً کوچکتر از آنست . این مطلب به‌زبان ریاضی چنین اثبات می‌شود :

$$(a\geqslant ۱)\equiv(a>۱\vee a=۱)$$

ونقیض آن می‌شود :

$$\sim(a\geqslant ۱)\equiv\sim(a>۱\vee a=۱)$$
$$\equiv\sim(a>۱)\wedge\sim(a=۱)$$
$$\equiv(a\not>۱\wedge a\neq۱)$$
$$a\not\geqslant ۱\equiv a<۱$$

مثال ۲ـ گزارهٔ « چنین نیست که a عددی است کوچکتر از ۴ و بزرگتراز ۲ » هم‌ارز است باگزارهٔ « چنین نیست که a عددی است کوچکتر از ۴ یا چنین نیست که a عددی است بزرگتراز۲ » یا به‌زبان ساده‌تر « a کوچکتر از ۴ نیست یا a بزرگتر از ۲ نیست » وبا زبان منطق داریم :

$$(۲<a<۴)\equiv(۲<a\wedge a<۴)$$

ونقیض آن چنین است :

$$\sim(۲<a<۴)\equiv\sim(۲<a\wedge a<۴)$$

قضیه دمورگان :

$$\equiv\sim(۲<a)\vee\sim(a<۴)$$
$$\equiv(۲\not<a)\vee(a\not<۴)$$
$$\equiv(۲\geqslant a\vee a\geqslant ۴)$$

قضیهٔ ۳ـ نقیض هرگزارهٔ شرطی هم‌ارز است با ترکیب عطفی مقدم و نقیض‌تالی‌آن ، یعنی : $\sim(p\Rightarrow q)\equiv(p\wedge\sim q)$

برهان ـ داریم :

$$p\Rightarrow q\equiv(q\vee\sim p)$$
$$\sim(p\Rightarrow q)\equiv\sim(q\vee\sim p)$$
$$\equiv\sim q\wedge\sim(\sim p)$$
$$\equiv p\wedge\sim q$$

مثال ـ نقیض گزارهٔ شرطی « اگر n فرد باشد ، آنگاه $n+1$ زوج است » عبارتست از گزارهٔ « n فرد است و $n+1$ زوج نیست » .

قضیه ۴ـ هرگزاره دو شرطی هم‌ارز است با عکس نقیض خودش ، یعنی :

$$(p\Leftrightarrow q)\equiv(\sim p\Leftrightarrow\sim q)$$

برهان ـ ساده و بعهدهٔ دانش‌آموزان است .

مثال ـ گزارهٔ « شرط لازم و کافی برای آنکه $a=2$ ، آنستکه $2a=6$ » هم‌ارز است با گزارهٔ « شرط لازم و کافی برای‌آنکه $a\neq 2$ ، آنستکه $2a\neq 6$ ».

قضیه ۵ـ هرگاه p و q دوگزاره‌باشند: $\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim q\Leftrightarrow p\equiv q\Leftrightarrow\sim p$

اثبات بعهدهٔ دانش‌آموزان است.

مثال ـ نقیض گزاره دو شرطی «شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای روی عمود منصف یك پاره خط باشد آن است که از دو سر پاره خط بیك فاصله باشد» هم‌ارز است با « شرط لازم وکافی برای آنکه نقطه‌ای روی عمود منصف یك پاره خط نباشد آن است که از دوسرپاره خط بیك فاصله باشد».

قضیه ۶ـ هرگزارهٔ شرطی که تالی آن خود شرطی باشد هم‌ارز است با گزاره شرطی که مقدم آن ترکیب عطفی مقدم گزارهٔ اصلی و مقدم‌گزاره تالی بوده و تالی آن تالی‌گزاره تالی باشد .

یعنی : $(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))\equiv((p\wedge q)\Rightarrow r)$

برهان ـ ازطرف چپ شروع می‌کنیم :

ترکیب هم‌ارز ترکیب شرطی : $(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))\equiv((q\Rightarrow r)\vee\sim p)$

ترکیب هم‌ارز ترکیب شرطی : $\equiv((r\vee\sim q)\vee\sim p)$

شرکت پذیری و دمورگان : $\equiv(r\vee\sim(p\wedge q))$

$$\equiv(p\wedge q\Rightarrow r)$$

مثال ـ گزارهٔ « اگر ABC مثلث باشد ، آنگاه اگر AM میانه باشد ، آنگاه فاصلهٔ

دو رأس B و C تا AM مساوی است » هم‌ارزاست باگزارهٔ «اگر ABC مثلث باشد و AM میانه باشد ، آنگاه فاصلهٔ دو رأس B و C تا AM مساوی است » . که معمولا در کتابهای هندسه به‌صورتهای زیر بیان می‌شود :

« اگـر درمثلث ABC ، خط AM میانه باشد ، آنگاه فاصلهٔ دو رأس دیگـر تا AM مساوی است ».

« در هرمثلث ABC ، اگر AM میانه باشد ، آنگاه فاصلهٔ دو رأس دیگـر تا AM مساوی است ».

نتیجه۱ـ درگـزارهٔ شرطی $P \Longrightarrow Q$ هرگاه P همیشه نادرست باشد ، $P \Longrightarrow Q$ یك استلزام منطقی است زیرا ، درهم‌ارزی $(P \Longrightarrow Q) \equiv Q \vee \sim P$ داریـم $\sim P$ همیشه درست است و در نتیجه $Q \vee \sim P$ همیشه درست خواهدبود یعنی ازیك مقدم نادرست هر نتیجه‌ای را می‌توان گرفت . مثلا درمجموعهٔ اعداد طبیعی ، اگر $x = 2x$ ، آنگاه x اول است .

چون مقدم این گزاره برای x نادرست است ، این گزاره همیشه درست بوده و یك قضیه ریاضی است . این روش استدلال را اثبات به‌انتفاء مقدم یا اثبات به‌نفی مقدم می‌خوانند.

نتیجه۲ـ اگر P و Q دوگزاره باشد ، آنگاه $Q \Longrightarrow (P \Longrightarrow Q)$ یك استلزام منطقی است، یعنی از Q همیشه $P \Longrightarrow Q$ نتیجه می‌شود. چرا ؟

تمرین

۱ ـ گزاره های زیر را بصورت شرط لازم یا شرط کـافی بنویسید :

الف ـ دریك مستطیل طول دوقطر با هم برابرند .

ب ـ طول دوقطر ذوزنقهٔ متساوی الساقین باهم برابرند .

ج ـ یك مثلث که درآن یك ارتفاع ویك نیمساز برهم منطبق باشند متساوی‌الساقین است .

۲ـ نقیض هریك ازگزاره‌های تمرین ۱ را که به‌صورت شرطی نوشته‌اید، به‌دست‌آورید.

۳ـ بجای ، ... ، درجمله‌های زیر الفاظ شرط لازم ، شرط کافی یا شرط لازم و کافی را بکار ببرید . تا گزاره های درست بدست آید .

الف ـ ... برای آنکـه یـك چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد ، آنستکه هردو زاویـه روبرو برابر باشند .

ب ـ ... برای‌آنکه $ac > bc$ ، آنستکه $a > b$ و $c > 0$.

ج ـ $x^2 - 1 = 0$ ، ... ، برای $x + 1 = 0$.

د ـ ... ، برای آنکه $\sin x = \sin y$ ، آنستکه $x = y$.

۴ـ گزاره‌های صفحهٔ بعد را فقط با استفاده ازنماد $\Longrightarrow$ بنویسید.

الف – $(p\wedge \sim q)\vee(p\wedge q)$.

ب – $(p\vee \sim q)\wedge(q\vee p)$.

ج – $\sim[(p\wedge q)\vee \sim p]$

۵ – با استفاده ازخاصیت جابجائی «$\vee$» ومطالب خوانده شده خاصیت جابجائی «$\wedge$» را درمجموعهٔ گزاره‌ها ثابت کنید.

۶ – با استفاده ازخاصیت پخشی «$\vee$» نسبت به «$\wedge$» ومطالب خوانده شده پخشی بودن $\wedge$ را نسبت به $\vee$ درمجموعه گزاره‌ها ثابت کنید.

۷ – با استفاده از شرکت‌پذیری «$\vee$» و مطالب خوانده شده شرکت‌پذیری «$\wedge$» را در مجموعه گزاره‌ها ثابت کنید.

۸ – ثابت کنید گزاره‌های زیر استلزام منطقی هستند:

الف – $p\Rightarrow p$ ه – $p\Rightarrow[q\Rightarrow(p\wedge q)]$

ب – $p\Rightarrow p\vee p$ و – $[(p\Rightarrow q)\wedge p]\Rightarrow q$

ج – $r\Rightarrow r\vee p$ ز – $[(p\Rightarrow q)\wedge\sim q]\Rightarrow\sim p$

د – $r\wedge q\Rightarrow r$ ح – $[(p\vee q)\wedge\sim p]\Rightarrow q$

۹ – ثابت کنید گزاره‌های زیر همیشه نادرستند:

الف – $p\wedge\sim(p\vee q)$ ب – $(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$

ج – $p\wedge[\sim(p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)]$ د – $\sim[p\wedge q\Rightarrow p\vee q]$

۱۰ – ثابت کنید گزاره‌های زیر قضایای دوشرطی هستند:

الف – $[p\wedge(q\vee p)]\Leftrightarrow p$ ج – $[(p\Rightarrow q)\wedge(p\vee q)]\Leftrightarrow q$

ب – $[p\vee(p\wedge q)]\Leftrightarrow p$ د – $[\sim(p\Rightarrow q)\vee p]\Leftrightarrow p$

۱۱ – ترکیبهای عطفی، فصلی، دوشرطی را فقط با استفاده ازنمادهای $\sim$ و $\Rightarrow$ بنویسید.

۱۲ – ترکیبهای عطفی، شرطی و دوشرطی را فقط با استفاده ازنمادهای $\sim$ و $\vee$ بنویسید.

۱۳ – $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv q\Rightarrow(p\Rightarrow r)$

سورها

به گزاره‌های زیر توجه کنید:

– درهرمثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است.

– برای هر قوس x، داریم: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

– هرپلیس آتش‌نشانی شجاع است.

– برای هردو عددحقیقی x و y داریم: $(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2$

ـ برای هردومجموعهٔ A و B داریم : $(A-B)\cap C=(A\cap C)-B$

همه این گزاره‌ها بالفظ «هر» بیان شده‌اند و خاصیتی را به‌تمام عضوهای مجموعهٔ مرجع مورد بحث (عالم سخن) نسبت داده‌اند . درحقیقت تمام اتحادهای ریاضی ازهمین نوعند. این گزاره‌ها راگزاره‌های سور کلی یاگزاره‌های کلی می‌خوانند و برای نمایش‌آنها ، همانطورکه در سال اول دیدید ، ازنماد «∀» که بنام سور عمومی خوانده می‌شود استفاده می‌کنند :

$\forall x\in \mathbb{R}$ ، $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\forall x\in N$ ، $x^2\geqslant x$

این گزاره‌ها را در حالت‌کلی وقتی مجموعهٔ مرجع معلوم باشد به‌صورت $\forall x$، $p(x)$ نمایش می‌دهند و می‌خوانند هر x دارای خاصیت P است یا برای تمام x ها خاصیت P برقرار است .برای تمام x ها خاصیت P درست است .

اما گزاره‌هائی وجود دارندکه خاصیتی را به‌یك یا چند عضو ازمجموعه مرجع موردبحث (عالم‌سخن) نسبت می‌دهند :

ـ بعضی از اعداد اول زوج است .

ـ بعضی از قضایای هندسی دوشرطی است .

ـ بعضی از اعداد فرد اولند .

ـ بعضی مثلثها متساوی‌الساقین است .

ـ بعضی ازدانش‌آموزان باهوشند .

ـ بعضی ازاعداد طبیعی مجذور کاملند.

اولین‌گزاره بیان می‌کندکه دست‌کم یك عدد درمجموعهٔ اعداد اول وجود داردکه زوج است (دراینجا فقط یکعدد وجود دارد) . اما سومین‌گزاره بیان می‌کندکه عدد یا اعدادی در مجموعهٔ اعداد فرد وجود دارندکه اول‌هستند و جوابها بیشمارند.

اگر P ، E و F بترتیب مجموعهٔ اعداد اول ، مجموعهٔ اعداد زوج و مجموعه‌اعداد فرد باشند این دوگروه بصورتهای زیر نوشته میشوند :

$\exists x(x\in P\wedge x\in E)$

$\exists x\,(x\in F\wedge x\in P)$

این‌گزاره‌ها را درحالت‌کلی ، وقتی‌که مرجع معلوم باشد به‌صورت $\exists x$ ، $P(x)$ نمایش می‌دهند و می‌خوانند بعضی از x های مرجع دارای خاصیت P است. نماد «∃» را سور وجودی وگزارهٔ $\exists x$ ، $P(x)$ را گزاره سور وجودی می‌نامند .

گاهی ترکیبی ازسورهای عمومی و وجودی ، در ریاضیات ، مورد استفاده قرارمی‌گیرد، مثلا درمجموعهٔ اعداد حقیقی داریم :

– برای هر x اقلا یك y وجود دارد به‌قسمتی‌که x مساوی y نیست ، یعنی :

(گزارهٔ درست) $\forall x \text{ ، } \exists y \text{ ، } x \neq y$

– اقلا یك x برای هر y وجود دارد به‌قسمتی‌که x مساوی y نیست ، یعنی :

(گزارهٔ نادرست) $\exists x \text{ ، } \forall y \text{ ، } x \neq y$

– برای هر a و هر b حاصلضرب a در b برابر است با حاصلضرب b در a ، یعنی[1] :

(گزارهٔ درست) $\forall a \text{ ، } \forall b \text{ ، } ab = ba$

در بعضی موارد، ازجمله اتحادهـای ریاضی ، ازگذاشتن نماد سوری خودداری می‌کنند.
مثلا در مجموعهٔ اعداد حقیقی داریم :

$$ab = ba$$

$$a + b = b + a$$

$$a^{3} + b^{3} = (a + b)(a^{2} - ab + b^{2})$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

دراینگونه موارد ازلفظ «همواره» استفاده می‌نمایند .

نقیض گزاره‌های سوری

۱– نقیض سور عمومی : نقیض گزارهٔ «تمام اعداد اول فردهستند» عبارتست از«چنین نیست که تمام‌اعداداول فرد هستند» .

که مفهوم‌آن این‌است که اقلا یکعدد اول وجود داردکه فرد نیست

اگر دامنهٔ متغیر x مجمـوعهٔ اعداد اول باشد ، مطلب فوق با زبان ریاضی چنین نوشته می‌شود :

$\sim(\forall x \in P$ ، فرداست $x) \equiv (\exists x \in P$ ، فردنیست $x)$

همچنین نقیض گزارهٔ :

«برای تمام مقادیر x متعلق به‌مجموعهٔ اعداد طبیعی ، $x < x^{2}$»

عبارتست از :

«چنین نیست‌که برای تمام مقادیر x متعلق به‌مجموعهٔ اعداد طبیعی $x < x^{2}$» یعنی، اقلا یکعدد طبیعی وجود داردکه خودش ازمربعش کوچکترنیست. اگردامنهٔ متغیر x ، مجموعهٔ‌اعداد طبیعی باشد ، این مطلب به‌زبان ریاضی چنین نوشته می‌شود :

$\sim(\forall x \text{ ، } x < x^{2}) \equiv (\exists x \text{ ، } \sim(x < x^{2}))$

۱– می‌توان بجای $\forall a \forall b (ab = ba)$ عبارت $\forall a$ و $b(ab = ba)$ را نوشت .

$$\equiv \exists x \,،\, x \not< x^2$$
$$\equiv \exists x \,،\, x \geqslant x^2$$

نقیض گزاره « هر انسانی فناپذیر است » عبارتست :

« چنین نیست که هر انسانی فناپذیر است »

یعنی ، اقلا یك انسان وجود دارد که فناپذیر نیست . اگر دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ انسانها باشد ، عبارت ریاضی بحث فوق چنین است :

$\sim(\forall x \in M$ ، x فناپذیر است$) \equiv (\exists x \in M$ ، x فناپذیر نیست$)$

به‌طور کلی اگر A مجموعه مفروض و $P(x)$ گزاره‌نمای تعریف شده روی A باشد ، درمورد نقیض سور عمومی دستور زیر را داریم :

$$\sim(\forall x \,،\, P(x)) \equiv \exists x \,،\, \sim P(x)$$

که خوانده می‌شود ، نقیض گزارهٔ « هر x دارای خاصیت P است » هم‌ارز است باگزارهٔ « x ی وجود دارد که دارای خاصیت P نیست ».

۲ـ نقیض سور وجودی : اگر دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد نقیض گزاره « برای بعضی مقادیر x $(x \leqslant x^2)$ » عبارتست از :

« چنین نیست که برای بعضی مقادیر x ، متعلق به‌مجموعهٔ اعداد طبیعی $x \leqslant x^2$ ».

یعنی ، برای تمام مقادیر x متعلق به‌مجموعه اعداد طبیعی ، چنین نیست که $x \leqslant x^2$.

این مطلب را با زبان ریاضی چنین می‌نویسیم :

$$\sim(\exists x \,،\, x \leqslant x^2) \equiv (\forall x \,،\, \sim(x \leqslant x^2))$$
$$\equiv (\forall x \,،\, x \nleqslant x^2)$$

درحالت کلی ، اگر گزاره نمای $P(x)$ روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد ، نقیض گزارهٔ سور وجودی از دستور زیر به‌دست می‌آید :

$$\sim(\exists x \in A \,،\, P(x)) \equiv (\forall x \in A \,،\, \sim P(x)) \qquad (۱)$$

ومی‌خوانند؛ نقیض گزارهٔ «بعضی مقادیر x از A دارای خاصیت P است» هم‌ارز است باگزارهٔ «هر x ی از A دارای خاصیت P نیست».

گاهی هم‌ارزی (۱) را به‌صورت زیر می‌نویسند :

$$(\forall x \in A \sim P(x)) \equiv (\nexists x \in A \,،\, P(x)) \qquad (۲)$$

یعنی گزارهٔ «هر x ی از A دارای خاصیت P نیست» هم‌ارز است باگزارهٔ «هیچ x ی از A وجود ندارد که دارای خاصیت P باشد».

چند مثال

۱ـ گزاره ، «چنین نیست که درهر کلاس دانش‌آموزان درس می‌خوانند» هم‌ارز است با گزارهٔ «کلاسی وجود دارد که درآن دانش‌آموزی درس نمی‌خواند».

۲ـ نقیض گزارهٔ « بعضی‌ازاعداد اول زوجند» عبارتست از «تمام اعداد اول زوج‌نیستند یا هیچ عدد اولی وجود ندارد که زوج باشد» .

۳ـ $\sim(\forall x ، (x>1)) \equiv \exists x ، x \not> 1$

۴ـ «هیچ عدد زوج بزرگتراز ۲ وجود ندارد که اول باشد » هم‌ارز است با : « هرعدد زوج بزرگتر از ۲، اول نیست »

نقیض گزاره‌هائی که پیشوندهای $\forall$ و $\exists$ را باهم دارند ـ به‌مثالهای زیر توجه کنید :

الف ـ
$$[\sim(\forall x\ \forall y ، (x+y)^2=x^2+2xy+y^2)]\equiv$$
$$\exists x ، \sim[(\forall y (x+y)^2=x^2+2xy+y^2)]\equiv$$
$$\exists x \exists y ، \sim[(x+y)^2=x^2+2xy+y^2] \equiv \exists x \exists y ، (x+y)^2 \neq x^2+2xy+y^2$$

ب ـ
$$\sim(\forall x \exists y ، x+y>5) \equiv \exists x \forall y ، \sim(x+y>5) \equiv \exists x \forall y ، x+y \not> 5)$$

ج ـ گزارهٔ «چنین نیست که درهر کلاس شاگردی وجود دارد که فوتبال بازی می‌کند» هم‌ارز است باگزارهٔ «کلاسی وجود دارد که تمام شاگردان آن فوتبال بازی نمی‌کنند».

د ـ گزارهٔ ، «چنین‌نیست که هر کس بعضی‌ازکشورهای اسلامی را دیده است» هم‌ارزاست باگزارهٔ «بعضی افراد هستند که همهٔ کشورهای اسلامی را ندیده‌اند».

به‌طورکلی ، اگر A و B دومجموعه‌ای باشند و گزاره نمای $P(x,y)$ روی‌آنها تعریف شده باشد ، نقیض این نوع گزاره‌ها ازدستورهای زیر بدست می‌آید :

الف ـ $\sim(\forall x ، \forall y ، P(x ، y)) \equiv (\exists x ، \exists y ، \sim P(x ، y))$

ب ـ $\sim(\forall x ، \exists y ، P(x ، y)) \equiv (\exists x ، \forall y ، \sim P(x ، y))$

ج ـ $\sim(\exists x ، \forall y ، P(x ، y)) \equiv (\forall x ، \exists y ، \sim P(x ، y))$

د ـ $\sim(\exists x ، \exists y ، P(x ، y)) \equiv (\forall x ، \forall y ، \sim P(x ، y))$

مثال ۱ـ گزارهٔ « چنین‌نیست که‌شهری وجود دارد که درآن شهرمدرسه‌ای وجود دارد که درآن مدرسه بعضی ازمعلمین مرتبند » هم‌ارزاست باگزارهٔ «درهمهٔ شهرها و درهمهٔ مدرسه‌ها همه معلمین مرتب نیستند».

مثال ۲ـ گزارهٔ « چنین نیست که تمام دانش‌آموزان رشته ریاضی و فیزیک تمام مدارس تهران باهوشند » هم‌ارزاست باگزارهٔ «بعضی ازدانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی وفیزیک بعضی از مدارس تهران باهوش نیستند» .

مثال نقض ـ ممکن است این سؤال به ذهن یک دانش‌آموز برسد که هرگاه A مجموعه اعداد اول و B مجموعهٔ اعداد فرد باشد آیا $A \subset B$ یک گزاره همیشه درست است . یعنی یک قضیهٔ ریاضی است یا خیر ؟ همچنین به‌ذهن این دانش‌آموز برحسب تصادف عدد ۲ می‌رسد که اول هست یعنی متعلق به A است ولی فرد نیست یعنی متعلق به B نیست . همین مثال برای رد $A \subset B$ کافی است. دراینجا عدد ۲ را مثال یا جواب نقض می‌خوانند.(بطور کلی برای اثبات نادرستی گزاره $\forall x P(x)$ درستی نقیض این گزاره یعنی $\exists x \sim P(x)$ را ثابت می کنیم. دراینصورت عضوی مانند 1 پیدا می کنیم که $P(1)$ درست نباشد.) نادرستی بسیاری از گزاره‌هائی که قضیه نیستند بامثال نقض بیان می کنیم .

تمرین

۱ـ برای هر گزاره‌نما سوری بکار ببرید که آن گزاره نما را به گزارهٔ درست تبدیل کند. (دامنهٔ متغیرها را مجموعهٔ اعداد حقیقی فرض کنید) .

الف ـ $\sin t \cdot \cot g t = \cos t$

ب ـ $(x+2)(x-2)=x^2-4$

ج ـ $x^2+5x+4=0$

د ـ $|x-y| \geqslant |x|-|y|$

هـ ـ $x+2<1$

و ـ $|x+y| \leqslant |x|+|y|$

ز ـ $|xy|=|x| \cdot |y|$

۲ـ نقیض گزاره‌های سوری زیررا پیداکنید وآنهارا بدون بکاربردن حروف بفارسی روان بیان کنید .

الف ـ $\forall a$ و $b \in R$ ، $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

ب ـ $\exists x \in R$ ، $x^2<0$

ج ـ $\forall a$ و $b \in Z$ ، $a>b \Longrightarrow a^2>b^2$

۳ـ طرف دیگر هم‌ارز بهارا بنویسید:

الف ـ $\sim(\forall x \sim P(x)) \equiv \cdots$

ب ـ $\sim(\nexists x, P(x)) \equiv \cdots$

ج ـ $\sim(\forall x, P(x) \Longrightarrow Q(x)) \equiv \cdots$

د ـ $\sim(\exists x, \sim P(x)) \equiv \cdots$

۴ـ ارزش درستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید:

الف ـ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$

ب ـ $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y$

ج ـ $\nexists x \forall y, x \neq y$

د ـ $\exists x, \nexists y, x \neq y$

استنتاج

فرض کنید در بالای در ورودی یك استخر شنا آگهی کرده باشند که :

« اگر هوا بارانی است ، آنگاه استخر تعطیل است »　(۱)

همچنین فرض کنید که واقعاً « هوا بارانی باشد »　(۲)

دراینصورت از گزاره‌های درست (۱) و (۲) گزارهٔ درست زیرنتیجه می‌شود :

« استخر تعطیل است »　(۳)

حال گزاره‌های درست زیر را درنظر بگیرید :

« اگر فردا جمعه باشد ، آنگاه مدرسه تعطیل است »

« فردا مدرسه تعطیل است »

آیا ازگزاره‌های درست فوق می‌توان نتیجه گرفت :

« فردا جمعه است »

جواب مسلماً منفی است. زیرا ممکن است فردا یکی‌ازجشنهای اسلامی بوده و مدرسه تعطیل باشد.
هر کدام ازبحثهای فوق یك استنتاج است .

استنتاج بمفهوم نتیجه‌گیری است بدین‌معنا که از گزاره‌های مفروضی با استفاده از دستورهای معینی که بنام قوانین خوانده می‌شوند گزارهٔ دیگری را نتیجه می‌گیریم .

دربحث فوق ، آیا ازگزاره‌های (۱) و (۳) می‌توان گزارهٔ « هوا بارانی است » را نتیجه گرفت ؟ دراین‌قسمت ما می‌خواهیم روشن‌سازیم که چه موقع‌ازمفروضات‌درستی‌می‌توان‌نتیجهٔ درست گرفت وچه‌موقع‌نمی‌توان ، برای‌این منظورازتعاریف‌وقضایای‌موجوددراین زمینه‌استفاده‌می‌کنیم.

قرارداد ـ هرگاه ازگزاره‌های مفروض P_1 ، P_2 ، ... P_n گزارهٔ Q نتیجه شده‌باشد می‌نویسیم :

$$P_1 \text{ و } P_2 \text{ و } \dots \text{ و } P_n \vdash Q$$

تعریف ـ استنتاج ، P_1 و P_2 و ... و $P_n \vdash Q$ معتبر است اگر و فقط اگر گزارهٔ زیر یك گزارهٔ همیشه درست باشد .

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow Q$$

گزاره‌های P_1 ، P_2 ، ... ، P_n رامقدمات استنتاج خوانده وآنهارا درست‌فرض می‌نمایند و Q را نتیجه استنتاج می‌خوانند. اساس استنتاج برقضایای بحث‌شده دراین‌قسمت‌استوار‌است.

قضیه ـ اگر p و $p \Longrightarrow q$ دوگزاره درست باشند ، آنگاه q نیزدرست‌است .

برهان ـ فرض‌کنیم q یک‌گزاره درست نباشد ؛ دراینصورت ارزش q نادرست‌است چون طبق‌فرض ، p درست‌است بنابه‌تعریف‌گزارهٔ شرطی ارزش $p \Longrightarrow q$ نادرست است و این‌خلاف فرض است ، زیرا $p \Longrightarrow q$ درست فرض شده است. بنابراین q درست خواهد بود .

این قضیه بنام قانون انتزاع خوانده شده آنرا به‌صورتهای زیر بیان می‌کنند[1].

گزاره همیشه درست است : $[(p \Longrightarrow q) \wedge p] \Longrightarrow q$

یا از $p \Longrightarrow q$ و p نتیجه می‌شود q : $p \Longrightarrow q$ و $p \vdash q$

یا از $p \Longrightarrow q$ و p نتیجه می‌شود q :

$$\begin{array}{l} p \Longrightarrow q \,\& \\ \underline{p \qquad\qquad\qquad} \\ \therefore q \end{array}$$

درمثال استخر ، اگر گزاره‌های «هوا بارانی است » و « استخرتعطیل است» را به‌ترتیب با p و q نمایش دهیم در اینصورت دستور شرطی مربوط به مثال بـالا ، به‌شکل زیر نوشته می‌شود :

$$p \Longrightarrow q$$

که یکی ازمفروضات استنتاج بوده و فرض دیگر ، درست بودن‌گزاره p ، یعنی « هوا بارانی است » می‌باشد .

بنابراین، استنتاج بالا به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\begin{array}{l} p \Longrightarrow q \,\& \\ \underline{p \qquad\qquad} \\ \therefore q \end{array} \qquad (1)$$

که قانون انتزاع بوده و معتبر است .

نتیجه ۱ـ با توجه باینکه هرگزارهٔ شرطی هم‌ارز عکس نقیض خودش است ما می‌توانیم در (۱) بجای $p \Longrightarrow q$، عکس نقیض‌آنرا قرار دهیم درنتیجه قانون انتزاع به‌صورت زیرنوشته می‌شود :

$$\begin{array}{l} p \Longrightarrow q \,\& \\ \underline{\sim q \qquad\qquad} \\ \therefore \sim p \end{array} \quad \text{یا} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \sim q \Longrightarrow \sim p \,\& \\ \underline{\sim q \qquad\qquad} \\ \therefore \sim p \end{array} \qquad (2)$$

1ـ Law of detachment

درحقیقت ما گزاره همیشه درست $[(\sim q\Longrightarrow\sim p)\wedge\sim q]\Longrightarrow\sim p$ یا $[(p\Longrightarrow q)\wedge\sim q]\Longrightarrow\sim p$ را داریم که خودیك استلزام منطقی‌است. چرا؟ لذا (۲) بنام **قانون نقیض انتزاع خوانده می‌شود** . ازاین قانون نیز در استنتاج استفاده می‌شود .

نتیجه ۲ـ باتوجه باینکه : $(p\Longrightarrow q)\equiv q\vee\sim p$ در (۱) می‌توان بجای گزارهٔ شرطی گزارهٔ همارز آن را قرارداد درنتیجه قانون انتزاع به صورت زیر نوشته خواهد شد :

$$\begin{array}{l} q\vee\sim p\& \\ p \\ \hline \therefore q \end{array} \qquad (۳)$$

درحقیقت ما گزارهٔ همیشه درست $[(q\vee\sim p)\wedge p]\Longrightarrow q$ را داریم که خود یك استلزام منطقی است .

معمولا (۳) را قانون رفع مؤلفه می‌خوانند . ازاین قانون نیز دربیان معتبر بودن یك استنتاج استفاده می‌شود . صورت دیگر این قانون چنین است :

$$\begin{array}{l} p\vee q\& \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

یعنی ازترکیب فصلی دو گزاره و نقیض یکی ازآنها ، گزارهٔ دیگر آن‌ترکیب فصلی نتیجه می‌شود.

چند مثال

۱ـ آیا استنتاج زیر معتبر است ؟ می‌دانیم که :

ـ حسن در دریاست یا حسن غرق نمی‌شود

ـ حسن در دریا نیست

$\therefore$ـ حسن غرق نمی‌شود

اگر گزاره‌های « حسن در دریاست» و «حسن غرق می‌شود» را به‌ترتیب با p و q نشان دهیم ، استنتاج فوق به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\begin{array}{l} p\vee\sim q\& \\ \sim p \\ \hline \therefore\sim q \end{array}$$

که یکی ازصورتهای قانون رفع مؤلفه است و درست است .

۲ـ آیا استنتاج زیر معتبر است ؟ می‌دانیم که :

ـ اگرهوا بارانی باشد یاکسی به‌مجلس جشن‌نیاید ، جشن باشکست مواجه خواهد شد .

ـ جشن باشکست مواجه نشد .

$\therefore$ ـ هوا بارانی نبوده است .

گزاره‌های «هوا بارانی است»، «کسی به‌مجلس جشن می‌آید» و «جشن باشکست مواجه می‌شود» را به‌ترتیب با p ، q و r نمایش دهیم خواهیم داشت :

$$p\vee\sim q\Longrightarrow r\&\quad(۱)$$

$$\frac{\sim r}{\therefore\sim p}$$

طبق تعریف استنتاج ، مقدمات درست است بنابراین ، از (۱) نتیجه می‌شود :

$$\sim r\Longrightarrow\sim p\wedge q$$

پس استنتاج فوق به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\sim r\Longrightarrow\sim p\wedge q\&$$

$$\frac{\sim r}{\therefore\sim p\wedge q}$$

که قانون انتزاع بوده و معتبر است و ازآنجا $\sim p$ درست است یعنی هوا بارانی نبوده است.

۳ــ آیا استنتاج زیر معتبر است ؟ می‌دانیم که :

$$p\vee q\Longrightarrow\sim(r\wedge\sim p)\&$$

$$\frac{p}{\therefore\sim r\vee p}$$

این استنتاج با توجه به‌قوانین دمورگان و درستی p به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$p\vee q\Longrightarrow\sim r\vee p\,\&$$

$$\frac{p\vee q}{\therefore\sim r\vee p}$$

که **قانون انتزاع بوده** و درست است .

دستور دیگر استنتاج از روی قضیه زیر به‌دست می‌آید .

قضیه ـ برای هرسه‌گزارهٔ p ، q و r ، اگرگزاره‌های $p\Longrightarrow q$ و $q\Longrightarrow r$ درست باشد آنگاه $p\Longrightarrow r$ نیزدرست است.

برهان ــ اثبات به‌روش برهان خلف است . یعنی گوئیم اگر $p\Longrightarrow r$ درست باشد که قضیه ثابت‌است . اگر نادرست باشد، آنگاه گزارهٔ $r\vee\sim p$ نادرست خواهد بود چرا ؟ و ازآنجا طبق تعریف ترکیب فصلی باید r و $\sim p$ نادرست باشد درنتیجه p درست است . اما در فرض نیز داریم $p\Longrightarrow q$ درست است . پس‌طبق قضیه انتزاع q درست است . اما q درست و r نادرست است درنتیجه $q\Longrightarrow r$ نادرست خواهد بود چرا ؟ وحال‌آنکه داریم $q\Longrightarrow r$ درست و این‌خلاف

فرض می‌باشد . بنابراین ، $p\Longrightarrow r$ درست است .

قضیهٔ فوق بنام **قانون قیاس** خوانده شده آنرا به‌صورتهای زیر نمایش می‌دهند :

$$\begin{array}{l} p\Longrightarrow q\ \& \\ q\Longrightarrow r \\ \hline \therefore p\Longrightarrow r \end{array}$$

یا $(p\Longrightarrow q)\wedge(q\Longrightarrow r)\vdash p\Longrightarrow r$

مثال ۱ـ آیا استنتاج زیر معتبر است ؟ می‌دانیم‌که :

ـ اگر x حشره است آنگاه x هشت پا ندارد .

ـ اگر x عنکبوت است آنگاه x هشت‌پا دارد .

∴ ـ اگر x عنکبوت است آنگاه x حشره نیست .

هرگاه گزاره نماهای «x حشره است» ، «x هشت‌پا دارد» و « x یك‌عنکبوت است » را به‌ترتیب با p،q وr نشان دهیم استنتاج فوق به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\begin{array}{l} p\Longrightarrow \sim q\ \& \\ r\Longrightarrow q \\ \hline \therefore r\Longrightarrow \sim p \end{array}$$

که با توجه به‌قضیه عکس نقیض هم‌ارز است با :

$$\begin{array}{l} p\Longrightarrow \sim q\ \& \\ \sim q\Longrightarrow \sim r \\ \hline \therefore p\Longrightarrow \sim r\equiv(r\Longrightarrow \sim p) \end{array}$$

واین قانون قیاس است درنتیجه استنتاج معتبر است .

هریك‌ازگزاره‌های زیر همیشه درست بوده‌درنتیجه استنتاج از روی آنها معتبراست .

الف ـ $p\Longrightarrow p\vee q$

ب ـ $p\wedge q\Longrightarrow p$ یا $p\wedge q\Longrightarrow q$

ج ـ $[(p\Longleftrightarrow q)\wedge p]\Longrightarrow q$ یا $[(p\Longleftrightarrow q)\wedge q]\Longrightarrow p$

بخصوص گزارهٔ (الف) بنام **قانون ادخال فاصل** و (ب) بنام **قانون حذف عاطف** معروف‌است‌و ازآنها زیاد استفاده می‌شود . مثلا اگرفرض‌کنیم گزارهٔ «بیژن باهوش است » درست باشد آنگاه گزارهٔ«بیژن باهوش است یا«ساسان نخست‌وزیر است » نیز درست است .

یا گزارهٔ زیر نیز درست است :

$$۲>۱\Longrightarrow(۲>۱)\vee(۲=۱)$$

درمورد گزارهٔ ب ، فرض کنیم گزارهٔ « خط Δ برخط D_1 و خط Δ برخط D_2 عمود است» درست باشد دراین صورت روشن است که هریك از گزاره‌های « خط Δ برخط D_1 عمود است» ، وبرخط Δ برخط D_2 عمود است» درست هستند .

استنتاج زیر طبق ج درست است .

- $A \subset B$ اگر و تنها اگر $A \cap B' = \varnothing$
- $A \subset B$

$\therefore A \cap B' = \varnothing$

تمرین

۱ــ آیا استنتاجهای زیر معتبر است ؟ (قانونی راکه درهرتمرین بکار می برید نام ببرید)

الف ــ می‌دانیم که :

ــ اگر عدد طبیعی a فقط دو مقسوم علیه مثبت متمایز داشته‌باشد، آنگاه a اول است .

ــ عدد طبیعی a فقط دو مقسوم علیه مثبت متمایز دارد.

$\therefore$ عدد طبیعی a اول است .

ب ــ می‌دانیم که :

ــ اگر $A \subset B$ ، آنگاه $B' \subset A'$
ــ $B' \not\subset A'$

$\therefore A \not\subset B$

۲ــ کدام یك از هم‌ارزیهای زیر درست است؟

الف ــ $p \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)$

ب ــ $p \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$

ج ــ $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

د ــ $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

ه ــ $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

و ــ $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \equiv [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$

۳ــ اگر فرض کنیم $\dfrac{p \,\&\, q}{\therefore r}$ درست باشد آیا می‌توان نتیجه گرفت که $\dfrac{p \,\&\, \sim r}{\therefore \sim q}$ درست است؟

(فرض کنیم مفروضات استنتاج نیز بتوانند نادرست باشند)

۴ــ آیا استنتاجهای زیر معتبر است ؟

$p \vee q$
$r \Rightarrow \sim p$
$\sim r \Rightarrow s$
$\sim q$
$\therefore s$

$r \Rightarrow q$ &
$q \Rightarrow \sim p$
$\therefore p \Rightarrow \sim r$

$\sim p \Rightarrow q$ &
$\sim q$
$\therefore p$

$p \Rightarrow q$ &
$q \Rightarrow \sim r$
$\therefore \sim r \vee \sim p$

$p \Rightarrow \sim q$ &
$\sim q \Rightarrow \sim r$
$\therefore r \Rightarrow p$

$p \wedge q$ &
$\sim r \Rightarrow \sim p$
$\therefore r \wedge q$

$p \Rightarrow \sim q$ &
$r \Rightarrow q$ &
r
$\therefore \sim p$

$p \Rightarrow q$ &
$\sim q \vee r$
$\therefore r \vee \sim p$

۵ ــ ثابت کنید :

$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ و $q) \vdash (p \Rightarrow r)$

۶ ــ ثابت کنید :

$(p \Rightarrow q) \vdash (r \vee p) \Rightarrow (r \vee q)$

۷ــ با استفاده ازتمرین ۶ ثابت کنید :

$(p \Rightarrow q) \vdash [(r \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow q)]$

۸ــ ثابت کنید :

$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \vdash (p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)$

۹ــ ثابت کنید :

$((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge ((p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim r) \vdash p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$

۱۰ــ آیا استنتاج زیر معتبر است؟

$\sim r \Rightarrow \sim p$ &
p
$\therefore (p \vee q) \wedge (r \vee s)$

۱۱ــ آیا گزاره زیر همیشه درست است؟

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$

فصل دوم

حلقه و میدان

مثال ۱ـ دستگاه $(Z, +, \times)$ ، یعنی مجموعهٔ عددهای صحیح نسبی (درست) را بادوعمل جمع‌وضرب معمولی، درنظر بگیرید، این دستگاه دارای خواص زیراست:

۱ـ دستگاه $(Z, +)$ یك گروه آبلی‌است.

۲ـ مجموعهٔ Z نسبت به‌عمل $\times$ بسته‌است.

۳ـ عمل $\times$ در Z شرکت‌پذیر است.

۴ـ عمل $\times$ نسبت‌به $+$ ازطرف چپ‌وراست توزیع‌پذیراست.

مثال ۲ـ دستگاه $(Q, +, \times)$ ، مجموعهٔ اعدادگویا بادو عمل جمع وضرب معمولی را در نظر بگیرید ، این دستگاه دارای خواص زیراست :

۱ـ دستگاه $(Q, +)$ یك‌گروه آبلی‌است.

۲ـ مجموعهٔ Q نسبت به‌عمل $\times$ بسته‌است.

۳ـ عمل $\times$ در Q شرکت‌پذیر است.

۴ـ عمل $\times$ نسبت‌به $+$ ازطرف چپ‌وراست توزیع‌پذیراست.

مثال ۳ـ مجموعهٔ اعداد زوج درست یعنی E را بادوعمل جمع و ضرب معمولی درنظر بگیرید، این دستگاه دارای خواص زیر است :

۱ـ دستگاه $(E, +)$ یك‌گروه آبلی‌است.

۲ـ مجموعهٔ E نسبت به‌عمل $\times$ بسته‌است.

۳ـ عمل $\times$ در E شرکت‌پذیر است.

۴ـ عمل $\times$ نسبت‌به $+$ ازطرف چپ‌وراست توزیع‌پذیر است.

هریك ازدستگاههای بالا، مثالی ازیك دستگاه ریاضی است که بنام‌حلقه خوانده می‌شود.

تعریف ـ مجموعهٔ ناتهی R را همراه بادوعمل دوتائی $+$ و $\times$ (یا $.$) که آنها را به ترتیب جمع‌وضرب می‌نامیم، یك‌حلقه‌گوئیم هرگاه داشته باشیم:

۱ـ $(R, +)$ یك‌گروه آبلی باشد.

۲ـ مجموعهٔ R نسبت به عمل $\times$ بسته باشد.

۳ـ عمل $\times$ در R شرکت‌پذیر باشد، یعنی برای هر a،b وc در R داشته باشیم:

$$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$$

۴ـ عمل $\times$ نسبت به $+$ ازدوطرف توزیع‌پذیرباشد؛ یعنی برای هر a، b وc در R داریم:

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$$

$$(b+c)\times a=(b\times a)+(c\times a)$$

این دستگاه را به $(R,+,\times)$ و گاهی برای سادگی به R نشان می‌دهیم.

اصطلاحات جمع وضرب صرفاً قراردادی و بخاطرراحتی است ومنظور این نیست که حتماً R مجموعهٔ اعداد است ویا عملهای $+$ و $\times$ همان جمع وضرب معمولی هستند. بلکه ممکن است R مجموعهٔ ماتریسها، مجموعهٔ مجموعه‌ها،... بوده واعمال جمع وضرب تعریف‌شده روی آنهاشباهتی باجمع وضرب معمولی اعداد داشته باشد.

چند مثال،

۱ـ هریك ازمجموعهٔ $M_{2\times2}$، $M_{3\times3}$، یعنی مجموعه‌های ماتریسهای ۲ $\times$ ۲ و۳ $\times$ ۳ با عملهای جمع‌وضرب ماتریسها یك‌حلقه‌است. زیرا دراصول مربوط به‌حلقه صدق می کنند.

۲ ـ مجموعهٔ ماتریس‌های ۲ $\times$ ۲ بفرم $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ بادوعمل جمع‌وضرب ماتریسها یك‌حلقه است.

ویژگیهای ابتدایی در حلقه، $(R,+,\times)$

می توان ثابت کرد:

الف‌ـ برای هر x در R داریم:

$$x\cdot 0=0\cdot x=0$$

ب‌ـ برای هرx و y در R داریم: $(-x)y=x(-y)=-xy$

ج‌ـ برای‌هرx و y در R داریم: $(-x)(-y)=xy$

تا کنون صحبتی ازعضو بی‌اثرعمل‌ضرب و همچنین تعویض‌پذیری عمل ضرب نکرده‌ایم، حلقه بااین ویژگیها دارای نامهای خاصی‌است که ما آنها را بررسی می‌کنیم:

حلقهٔ یك‌دار ـ حلقهٔ $(R,+,\times)$رایك‌حلقهٔ یك‌دار(یا باعضویکانی)نامیم‌هرگاه‌عمل ضرب در آن دارای عضوبی‌اثرباشد، این‌عضو بی‌اثررا به ۱ نشان داده آن راعضو واحد دستگاه می‌نامیم.

چند مثال،

۱ـ مجموعهٔ ماتریسهای ۲ $\times$ ۲ باعمل‌جمع وضرب ماتریسها یك‌حلقهٔ یك دار است‌زیرا دارای عضو بی‌اثر $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ نسبت به‌ضرب است.

۲ــ حلقهٔ $(Z, +, \times)$ نیز یک حلقهٔ یکه‌دار است.

۳ــ حلقهٔ $(E, +, \times)$ که در آن E مجموعهٔ اعداد صحیح نسبی زوج است یکه‌دار نیست.

حلقهٔ تعویض‌پذیرــ حلقهٔ $(R, +, \times)$ را یک حلقهٔ تعویض‌پذیر نامیم هرگاه عمل $\times$ در آن تعویض‌پذیر باشد. بعبارت دیگر، $\forall a, b \in R\ ,\ ab = ba$ (برای سهولت ab را بجای $a \times b$ نوشته‌ایم).

حلقهٔ $(E, +, \times)$ یک حلقهٔ تعویض‌پذیر است. ولی حلقهٔ $(M_{3\times 3}, +, \times)$، که در آن $M_{3\times 3}$، مجموعهٔ ماتریسهای 3×3 است تعویض‌پذیر نیست. زیرا ضرب ماتریسها خاصیت تعویض‌پذیری ندارد.

میدانــ حلقهٔ $(R, +, \cdot)$ را یک میدان نامند هرگاه R تعویض‌پذیر و یکه‌دار باشد و هرعضو مخالف صفر آن نیز متقابل ضربی داشته باشد.

دستگاههای $(Q, +, \times)$ و $(R, +, \times)$ میدان هستند. ولی $(Z, +, \times)$ و $(M_{2\times 2}, +, \times)$ میدان نیستند. زیرا در Z، هر عضو دارای متقابل ضربی نیست و در $M_{2\times 2}$ هر عضو معکوس (متقابل ضربی) ندارد مثلا: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

مقسوم‌علیه صفرــ در حلقهٔ $(R, +, \times)$ عضو $a \neq 0$ را یک مقسوم‌علیه صفر نامیم هرگاه عضوی مانند $b \neq 0$ در R یافت شود به گونه‌ای که $a \times b = 0$. براحتی می‌توان دید $\mathbb{R}$ مقسوم علیه صفر ندارد، زیرا، هرگاه $ab = 0 \Longrightarrow a = 0 \vee b = 0$

مثال: در $(M_{2\times 2}, +, \times)$؛ عضو $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq \bar{0}$ یک مقسوم علیه صفر است، زیرا

عضو $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$ که مخالف صفر است وجود دارد بقسمی که:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حوزهٔ درستــ حلقهٔ $(R, +, \times)$ را یک حوزهٔ درست نامیم هرگاه اولا تعویض‌پذیر باشد. ثانیاً مقسوم علیه صفر نداشته باشد.

قضیهــ شرط لازم و کافی برای اینکه حلقهٔ تعویض‌پذیر R یک حوزهٔ درست باشد، آنستکه برای هر a, b و c در R، داشته باشیم: $a \neq 0 \wedge (ab = ac) \Longrightarrow b = c$ (قانون حذف).

برهانــ فرض کنیم قانون حذف در R برقرار است باید ثابت کنیم R یک حوزهٔ درست است هرگاه $ab = 0$، باید نشان دهیم $a = 0$ یا $b = 0$. اگر $a = 0$ حکم ثابت است.

فرض کنیم $a\neq 0$ نشان می‌دهیم $b=0$، برای این منظور گوئیم بنابر ویژگی الف، $a.0=0$ و بفرض $ab=0$، داریم:

از $a\neq 0$ و وجود قانون حذف: $ab=0 \Longrightarrow ab=a.0 \Longrightarrow b=0$

بالعکسـ فرض کنیم R یک حوزهٔ درست باشد، ثابت می‌کنیم قانون حذف در آن برقرار است، هرگاه $ab=ac$ و $a\neq 0$، چنین داریم:

$$ab=ac \wedge a\neq 0 \Longrightarrow ab-ac=0 \wedge a\neq 0$$

توزیع‌پذیری: $\Longrightarrow a(b-c)=0 \wedge a\neq 0$

چون R حوزهٔ درست است: $\Longrightarrow (a=0 \vee (b-c)=0) \wedge a\neq 0$

قانون رفع مؤلفه: $\Longrightarrow b-c=0$

$$\Longrightarrow b=c$$

نتیجه ۱ـ قضیهٔ بالا نشان می‌دهد که درحلقهٔ تعویض‌پذیر، قاعدهٔ حذف معادل است با فرض نداشتن مقسوم علیه صفر.

نتیجه ۲ـ براحتی دیده می‌شود که قانون حذف درمیدان برقرار است بنابراین هرمیدان یک حوزهٔ درست است ولی عکس آن صحیح نیست.

مثال ـ $(Z, +, \times)$ حوزه درست است ولی میدان نیست.

زیرحلقه و ایدآل در حلقه

در حلقه‌ها همهٔ زیر مجموعه‌ها مورد توجه نیستند. بلکه زیر مجموعه‌های ویـژه‌ای مورد توجه هستند که نقش آنها در تئوری حلقه‌ها مهم است.

این زیرمجموعه‌ها را به‌نسبت اهمیتشان در زیر معرفی و ویژگی آنها را در حلقهٔ عددهای درست (صحیح و نسبی) بررسی می‌کنیم.

تعریف ـ فرض کنیم $(R, +, \times)$ یک حلقه باشد، زیر مجموعهٔ ناتهی S از R را یک زیرحلقه گویند اگر S با همان دوعمل + و × تشکیل یک حلقه دهد.

مثال ۱ ـ $(Z, +, \times)$ زیرحلقه $(Q, +, \times)$ است.

مثال ۲ ـ $(Q, +, \times)$ زیرحلقه $(\mathbb{R}, +, \times)$ است.

قضیه ـ هرگاه $S\subset R$ و مخالف $\varnothing$ باشد شرط لازم وکافـی برای آنکه $(S, +, \times)$ یک زیرحلقه $(R, +, \times)$ باشد آن است که:

الف ـ برای هر a و b در S، $a-b\in S$ (زیر گروه بودن S را تأمین می‌کند).

ب ـ برای هر a و b در S، $ab\in S$.

تعریف ـ فرض کنیم $(R, +, \times)$ یك حلقه باشد زیر مجموعه I از R را یك ایدآل دوطرفه در R نامیم هرگاه:

الف: I باعمل جمع زیر گروه R باشد (برای هر a و b در I، $a-b \in I$)

ب: برای هر $i \in I$ وهر $r \in R$ داشته باشیم $ri \in I$ و $ir \in I$.

آیا هر ایدآل دو طرفه یك زیرحلقه است؟ عکس آن چطور؟

چند مثال:

۱ ـ مجموعهٔ $2Z$، یعنی مجموعهٔ تمام عددهای صحیح نسبی(درست) زوج یك ایدآل حلقه Z است.

زیرا، الف: تفاضل هردو عدد زوج عددی است زوج.ب: حاصلضرب هرعدد صحیح نسبی دریکعدد زوج عددی است زوج.

۲ـ برای هر $mZ, m \in N$ یك ایدآل حلقه Z است. (بهدلیل تعریف)

۳ـ درهرحلقهٔ R، زیر مجموعههای $\{0\}$ و R هر کدام یك ایدآل R هستند چرا؟ (این ایدآلها را ایدآلهای بدیهی می‌نامیم).

۴ ـ در چند جملهایها، $P(x)$، اگرU مجموعهٔ تمام چند جملهائی باشد که مقدار ثابت آنها صفر است، آنگاه U یك ایدآل $P(x)$ است.

۵ـ اگر W مجموعهٔ تمام چند جملهائی باشد که مقدار ثابت آنها زوج است، آنگاه W یك ایدآل در $P(x)$ است.

بهطوری که در بند ۲، دیدیم مجموعهٔ مضارب عدد درست یك ایدآل Z است ثابت می‌شودکه هرایدآل Z بهاینصورت است، یعنی تنها ایدآلهای Z همانهائی هستند که از مضارب یكعدد بهدست می‌آیند. یا هر ایدآل حلقهٔ عددهای درست بهصورت mZ است[1]. ایدآل بهدست آمده ازعدد m را به(m) نشان می‌دهیم.

تمرین

۱ـ کدام یك از مجموعههای زیر همراه با اعمال جمع و ضرب اعداد تشکیل یك حلقه می‌دهد:

الف ـ $\{a+b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}$

ب ـ $\{5x \mid x \in Z\}$

۱ـ از اثبات صرفنظر می‌شود.

ج- $\left\{\frac{m}{۲}\middle| m\in Z\right\}$

د- $\left\{\frac{m}{۲^n}\middle| m, n\in Z\right\}$

۲- ثابت کنید برای $k\in N$ که k مربع کامل نباشد، مجموعهٔ زیر همراه با جمع و ضرب معمولی تشکیل یک حوزه درست می‌دهد.

$$Z\sqrt{k}=\{a+b\sqrt{k}\mid a, b\in Z\}$$

۳- ثابت کنید برای $k\in N$ کـه مربع کامل نباشد، مجموعهٔ زیر همراه با جمع و ضرب معمولی تشکیل یک میدان می‌دهد.

$$Q\sqrt{k}=\{a+b\sqrt{k}\mid a, b\in Q\}$$

۴- دو عمل * و ∘ روی $\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

الف $\begin{cases}a*b=a+b+۱\\ a\circ b=a+b+ab\end{cases}$ ب $\begin{cases}a*b=a+b-۱\\ a\circ b=a+b-ab\end{cases}$

آیا $(\mathbb{R}, *, \circ)$ یك حلقه است؟

۵- مجموعهٔ $F=\{f_۱, f_۲, f_۳, f_۴\}$ که در آن $f_۱(x)=x$ ،$f_۲(x)=-x$ ،$f_۳(x)=\frac{۱}{x}$، $f_۴(x)=-\frac{۱}{x}$ مفروض است آیا $(F, \circ)$ یك گروه است؟ عمل ∘ عمل ترکیب توابع است.

۶- مجموعهٔ زوجهای اعداد حقیقی با دو عمل + و × را به صورت زیر درنظر می گیریم:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

ثابت کنید دستگاه حاصل یك میدان است.

۷- هرگاه R حلقه تعویض‌پذیر و $a\in R$، آنگاه

$$aR=\{ar\mid r\in R\}$$

یك ایده‌آل در R است.

۸- اگر $U=\{ma+nb\mid m,n\in Z\}$ که در آن a و b دو عدد صحیح معین‌است ثابت کنید $(U,+,\times)$ یك ایده‌آل در Z است. (جمع و ضرب معمولی است)

۹- اگر U و V دو ایده‌آل حلقه R باشند ثابت کنید

$$U+V=\{u+v\mid u\in U, v\in V\}$$

نیز یك ایده‌آل R است.

۱۰- هرگاه U یك ایده‌آل در R باشد و $۱\in U$، ثابت کنید $U=R$.

۱۱- ثابت کنید تنها ایده‌آلهای میدان F، خود F یا $\{۰\}$ است.

فصل سوم

نظریه اعداد

در این فصل خواص اعداد صحیح $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ را بررسی می‌کنیم. برای مطالعه این خواص نیاز به تعاریف زیر داریم:

مجموعهٔ مرتب ــ مجموعهٔ A همراه با رابطه ترتیب $\mathcal{R}$ ، بنام مجموعــه مرتب خوانده شده و آن را به‌صورت $(A, \mathcal{R})$ نمایش میدهند.

عضو ابتدا وانتهای یك مجموعه

رابطه «$\leqslant$» روی مجموعهٔ اعداد صحیح، یک رابطه ترتیب است و بوسیله آن می‌توان اعداد صحیح را بشکل زیر مرتب نمود:

$$\leqslant \cdots -(n+1) \leqslant -n \leqslant \cdots \leqslant -2 \leqslant -1 \leqslant 0 \leqslant 1 \leqslant 2 \leqslant \cdots \leqslant n \leqslant n+1 \leqslant \cdots$$

در نتیجه $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ یك مجموعه مرتب نامیده میشود. به همین ترتیب مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد صحیح منفی هم با رابطه $\leqslant$ ، تشکیل مجموعه‌های مرتب میدهند.

$$(\mathbb{N}, \leqslant): 1, 2, 3, \cdots, n, n+1, \cdots$$

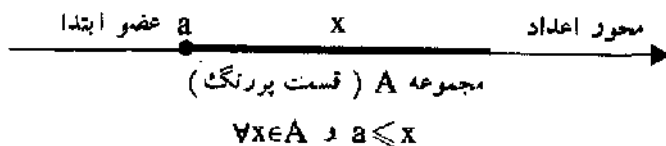
$$(-\mathbb{N}, \leqslant): \cdots, -(n+1), -n, \cdots, -3, -2, -1$$

در مجموعه اعداد طبیعی، هیچ عضوی قبل از ۱ نیست و یا ۱ مقدم بر همه عضوهای $\mathbb{N}$ می‌باشد. (۱ عضو ابتدای $\mathbb{N}$ است.)

در مجموعه $\mathbb{N}$ــ : هیچ عضوی بعد از (۱ ــ) نیست و یا ۱ ــ مؤخر بر همه اعضای «$\mathbb{N}$ــ» می‌باشد. ((۱ ــ) عضو انتهای مجموعه اعداد صحیح منفی است .) عضو ابتدا را کوچکترین عضو و عضو انتها را بزرگترین عضو نیز می‌نامند.

در $\mathbb{N}$ عضو انتها و در $\mathbb{N}$ ــ عضو ابتدا وجود ندارد .

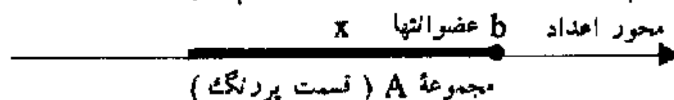
تعریف ۱ ــ فرض کنید $(A, \leqslant)$ یك مجموعه مرتب باشد. عضو $a \in A$ را عضو ابتدای مجموعه A می‌نامیم، هرگاه برای هر x در A داشته باشیم $a \leqslant x$.



مجموعه A (قسمت پررنگ)

$$\forall x \in A \quad \text{و} \quad a \leqslant x$$

تعریف ۴ ـ فرض کنید $(A, \leqslant)$ یك مجموعه مرتب باشد، عضو $b \in A$ را عضو انتهای مجموعه A می‌نامیم هرگاه برای هر x در A داشته باشیم $x \leqslant b$.



مجموعهٔ A (قسمت پررنگ)

$$\forall x \in A \quad و \quad x \leqslant b$$

ثابت می‌شود که عضوهای ابتدا و انتها، دریك مجموعه، اگر وجود داشته باشد، منحصر بفرد است.

چند مثال:

۱ـ مجموعه $A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ و } 0 \leqslant x < 1\}$، بارابطه «$\leqslant$» دارای عضو ابتدا می باشدولی عضوانتهاندارد.

۲ـ مجموعه $B = \{y : y \in \mathbb{R}, 0 < y \leqslant 1\}$، بـا رابطه «$\leqslant$» دارای عضو انتها می‌باشد ولی عضوابتداندارد.

۳ـ مجموعه $C = \{z : z \in \mathbb{R}, 0 < z < 1\}$ با رابطه «$\leqslant$» عضوابتدا ندارد و عضو انتها هم ندارد.

خوشترتیبی

یکی‌ازخواص اساسی مجموعهٔ اعداد طبیعی بارابطه «$\leqslant$» این‌است که هرزیر مجموعهٔ غیر تهی‌آن دارای عضو ابتدا میباشد. مجموعه مرتب $(\mathbb{N} \text{ و } \leqslant)$ با این ویژگی بنام یك مجموعه خوشترتیب خوانده میشود.

اصل خوش ترتیبی ـ هرزیرمجموعه‌غیرتهی‌ازمجموعه‌اعدادطبیعی‌دارای‌عضوابتدامی‌باشد.

بطورکلی

تعریف ـ مجموعه‌مرتب $(A\ ,\ \leqslant)$ رایك مجموعه خوشترتیب نامند، هرگاه هرزیرمجموعه غیرتهی آندارای عضوابتدا باشد.

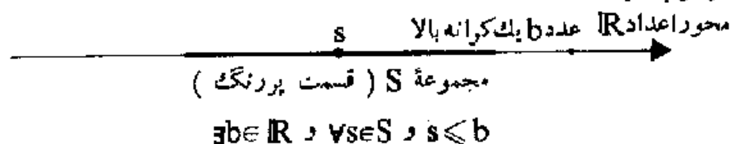
مجموعه مرتب $(\mathbb{R}, \leqslant)$ خوشترتیب نیست، زیرامجموعه $B = \{z : z \in \mathbb{R} \text{ و } 0 < z \leqslant 1\}$ عضوابتدا ندارد.

دراینجا بااستفاده ازاصل خوش‌ترتیبی اعداد طبیعی قضایایی راثابت می‌کنیم که در بیان مطالب‌دیگر این فصل مورد استفاده قرار میگیرند. برای این‌منظور تعاریف زیرراجهت‌یادآوری مطرح می‌نمائیم.

تعریف ـ مجموعه $S \subset \mathbb{R}$ راکراندار از بالا گوئیم هرگاه عددی مانند $b \in \mathbb{R}$ یافت شود به گونه‌ای که‌برای‌هر $s \in S$ داشته‌باشیم $s \leqslant b$ عدد b رایك کرانه‌بالا برای‌مجموعه S می‌نامیم. همچنین

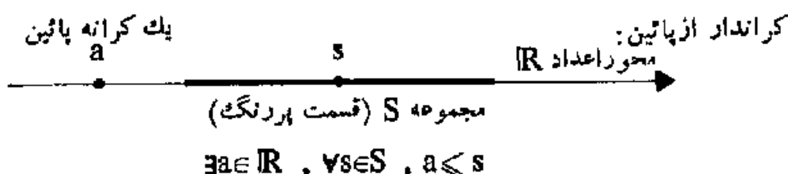
مجموعه S راکرانداز ازپائین گوئیم هرگاه عددی مانند $a\in\mathbb{R}$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $s\in S$ داشته‌باشیم $a\leqslant s$، عدد a رایك کرانه پائین‌برای مجموعه S می‌نامیم.

کراندار از بالا :



$$\exists b\in\mathbb{R} \text{ و } \forall s\in S \text{ و } s\leqslant b$$

کراندار ازپائین:



$$\exists a\in\mathbb{R}\ ,\ \forall s\in S\ ,\ a\leqslant s$$

قضیهـ هرمجموعه غیرتهی کرانداراز‌پائین ازاعداد صحیح‌دارای عضو ابتدا می‌باشد.

برهان ـ فرض کنیم S زیر مجموعهٔ غیرتهی Z و a یك کرانهٔ پائین برای S باشد ، دراینصورت بنابر تعریف کرانهٔ پائین ، برای هر s متعلق به S داریم :

$s\geqslant a$ ،باتوجه به اینکه‌بحث ما در Z است ، لذا بلافاصله نتیجه می‌شود $s>a-1$ و یا $s-(a-1)>0$. یعنی ، $s-(a-1)$ مثبت و عـدد طبیعی است ، حال مجموعه‌ای ازاین اعداد یعنی ، $T=\{t\mid t=s-(a-1) \text{ و } s\in S\}$ را در نظر می‌گیریم ، T زیر مجموعهٔ غیر تهی از اعداد طبیعی است.(چرا ؟) لذا T براساس اصل خوش‌ترتیبی دارای عضو ابتدا است . اگر t_0 عضو ابتدای T باشد، بنا بتعریف عضو ابتدا برای هر $t\in T$ داریم $t_0\leqslant t$. حال بجای t و t_0 طبق تعریف مجموعه T مقدارشان را قرار می‌دهیم:

$$s_0-(a-1)\leqslant s-(a-1)$$

و یا پس از حذف $(a-1)$ — از طرفین : $s_0\leqslant s$، یعنی وجود دارد $s_0\in S$ کـه برای هر $s\in S$ همواره $s_0\leqslant s$ است، لذا s_0 عضو ابتدای S است.

قضیهـ هرمجموعه غیرتهی کراندار ازبالای اعداد صحیح دارای عضوانتها میباشد.

برای اثبات ایـن قضیه مجموعـه $K=\{a+1-s : s\in S\}$ را وقتیکه a یك‌کـرانه بالایی برای‌آن مجموعه باشد، درنظر بگیرید.

استقراء ریاضی

بسیاری ازخواص اعداد طبیعی ناشی ازاصل خوش ترتیبی اعداد طبیعی است که‌از مهمترین آنها استقراء ریاضی می‌باشد که ما باپذیرفتن اصل خوش ترتیبی آنرا ثابت می‌کنیم.

قضیه استقراء ریاضی[1] (اصل استقراء ریاضی)

هر زیر مجموعه از اعداد طبیعی که ۱ متعلق به آن بوده و تالی[2] هر عضوش نیز عضو همان زیر - مجموعه باشد، با مجموعه اعداد طبیعی مساوی است یا به بیان دیگر اگر S زیر مجموعه $\mathbb{N}$ بوده و دارای خواص زیر باشد:

الف - $1 \in S$

ب - برای هر n اگر $n \in S$ آنگاه، $n+1 \in S$ باشد.

آنگاه $S = \mathbb{N}$ است.

برهان - تمام اعداد طبیعی که متعلق به S نیستند مجموعه‌ای تشکیل میدهندکه آن‌را S' می‌نامیم؛ ثابت می‌کنیم $S' = \varnothing$، فرض می‌کنیم $S' \neq \varnothing$ (برهان خلف) چون $S' \subset \mathbb{N}$، در اینصورت بنابر اصل خوش ترتیبی اعداد طبیعی، S' عضو ابتدا دارد، فرض می‌کنیم n_0 عضو ابتدای S' باشد؛ چون طبق فرض «الف» $1 \in S$ است، پس بـا توجه به تعریف S'، $1 \notin S'$، در نتیجه عضو ابتدا یعنی n_0 بزرگتراز ۱ است $(n_0 > 1)$ و عدد طبیعی $n_0 - 1$ چون از n_0 عضوابتدای S' کوچکتراست متعلق‌به S' نیست پس متعلق به S است. ازاینرو طبق‌فرض «ب» تالی $n_0 - 1$ یعنی n_0 نیزمتعلق به S است درصورتیکه n_0 عضو ابتدای S' و متعلق به S' می‌باشد واین متناقض با تعریف S' است. پس $S' = \varnothing$ است، درنتیجه $S = \mathbb{N}$ است.

نتیجهٔ قضیه استقراء ریاضی

قضیه استقراء ریاضی روشی بسیار مهم وتوانا برای اثبات قضایا و احکام ریاضی بدست می‌دهد که درتمام شاخه‌های ریاضی ازآن استفاده میشود روش مزبور چنین‌است:

قضیه - فرض می‌کنیم $P_{(n)}$ یک گزاره‌نما تعریف شده در مجموعه اعداد طبیعی باشد و در شرایط زیر صدق کند:

الف) $P_{(1)}$ درست باشد.

ب) اگر $P_{(k)}$ درست باشد آنگاه $P_{(k+1)}$ نیز درست باشد؛

در اینصورت $P_{(n)}$ برای هرعدد طبیعی n درست است.

برهان - زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی‌که عضوهای آن گزاره نمای $P_{(n)}$ را به‌گزاره درست تبدیل می‌کند (مجموعه جواب گزاره نمای $P_{(n)}$) S می‌نامیم. یعنی:

$$S = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ و } P_{(n)} \text{ درست است}\}$$

۱ــ بعضی ازکتابهای نظریه اعداد،استقراء ریاضی بعنوان اصل پذیرفته و اصل خوش‌ترتیبی را بعنوان قضیه ثابت می‌کنند.

۲ــ اگر n عددی طبیعی باشد $n+1$ تالی آن نامیده میشود.

بنابرفرض «الف» $P_{(1)}$ درست‌است پس $1 \in S$ و بنابر «ب» اگر $P_{(k)}$ درست باشد یعنی $k \in S$ ، آنگاه $P_{(k+1)}$ نیز درست است پس $k+1 \in S$ در نتیجه بنابر قضیه استقراء ریاضی $S = \mathbb{N}$ است یعنی $P_{(n)}$ بازاء هرعدد طبیعی n درست است.

مثال ۱ـ نشان دهیدکه برای هرعدد طبیعی n ، تساوی زیر درست است .

$$2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$$

حل : فرض‌کنیم P_n گزاره‌نمای بالا باشد . یعنی:

$$P_n:\ 2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$$

اگر در P_n بجای n عدد ۱ را قرار دهیم خواهیم داشت :

$$2=1(1+1)$$

ازاینجا نتیجه می‌شودکه P_1 درست‌است. یعنی شرط الف از قضیه استقراء ریاضی برقرار است .

اگرفرض‌کنیم P_k درست باشد (k یک‌عددطبیعی دلخواه است) خواهیم داشت :

(فرض استقراء) $$P_k:\ 2+4+6+\cdots+2k=k(k+1)$$

حال باید نشان دهیم‌که P_{k+1} نیز درست است یعنی باید نشان دهیم‌که :

(حکم استقراء) $$P_{k+1}: 2+4+6+\ldots+2k+2(k+1)=(k+1)(k+2)$$

اما بنابرفرض استقراء می‌توان نوشت :

$$\begin{aligned}2+4+6+\ldots+2k+2(k+1)&=(2+4+6+\ldots+2k)+2(k+1)\\&=k(k+1)+2(k+1)\\&=(k+1)(k+2)\end{aligned}$$

یعنی P_{k+1} نیز درست است . بنابراین‌شرط ب ازقضیه استقراء ریاضی نیزبرقرار است پس بنابرقضیه استقراء ریاضی برای هر عدد طبیعی n ، P_n درست است .

مثال ۲ـ نشان دهیدکه برای هرعدد طبیعی n ، نامساوی $2^n \geqslant 1+n$ درست است .

حل : فرض‌کنیم P_n گزاره نمای بالا باشد یعنی :

$$P_n:\ 2^n \geqslant 1+n$$

اگر در P_n بجای n عدد ۱ را قراردهیم خواهیم داشت :

$$2^1 \geqslant 1+1$$

ازاینجا نتیجه می‌شودکه P_1 درست است .

اگرفرض‌کنیم P_k درست باشد ، خواهیم داشت :

(فرض استقراء) $$P_k:\ 2^k \geqslant 1+k$$

حال نشان می‌دهیم‌که P_{k+1} نیزدرست است یعنی نشان می‌دهیم‌که :

(حکم استقراء) $P_{k+1}:\ 2^{k+1}\geqslant 1+(k+1)=2+k$

اما بنابرفرض استقراء می‌توان نوشت :

$$2^{k+1}=2.2^{k}\geqslant 2(1+k)>2+k$$

یعنی P_{k+1} نیز درست است بنابراین شرط ب ازقضیه استقراء ریاضی نیز برقرار است. پس بنابرقضیهٔ استقراء ریاضی برای هرعدد طبیعی n ، P_n درست است .

توجه ـ گاهی اوقات در مسائل استقراء بجای شروع $1\in S$، ممکن است با $2\in S$ ، $3\in S$ یا $4\in S$ شروع شود .

مثال ـ ثابت کنید گزاره نمای $P_{(n)}:\ 2n+1<2^{n}$ بازاء $n\geqslant 3$ درست است.

حل ـ گزاره $P_{(n)}$ برای $n=3$ درست است زیرا $2\times 3+1<2^{3}$ است باید ثابت کنیم اگــر $2k+1<2^{k}$ باشد آنگاه $2(k+1)+1<2^{k+1}$ نیز درست است . بــرای این منظور بــه طرفین نا مساوی $2k+1<2^{k}$ عــدد ۲ را اضافــه می‌کنیم ، خــواهیم داشت $2k+3<2^{k}+2$ (۱) حال ثابت می‌کنیم $2^{k}+2<2^{k+1}$ (۲) است . نامساوی (۲) پس از ساده شدن بصورت $2<2^{k}$ در می‌آید کــه برای $n\geqslant 3$ همواره برقــرار است . بنابراین با توجه به خــواص نامساویها ، از (۱) و (۲) نتیجه میشود $2k+3<2^{k+1}$ و یا $P_{(n)}$ بازاء جمیع مقادیر $n\geqslant 3$ درست است .

تمرین

۱ــ بااستفاده ازقضیهٔ استقراء ریاضی ثابت‌کنید که برای هرعدد طبیعی n ، داریم :

الف ـ $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^{2}$

ب ـ $1^{2}+2^{2}+3^{2}+\dots+n^{2}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ج ـ $1^{3}+2^{3}+3^{3}+\dots+n^{3}=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^{2}$

د ـ $1.3+2.5+3.7+\dots+n(2n+1)=\dfrac{4n^{3}+9n^{2}+5n}{6}$

هـ ـ $1+2+3+\dots+n<\frac{1}{8}(2n+1)^{2}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^{n}}=1-\frac{1}{2^{n}}$

۲ــ با استفاده از قضیهٔ استقراء ریاضی ثابت‌کنید :

الف ـ $(x^{n})'=nx^{n-1}$.

ب ـ $\log x^{n}=n\log x$

۳ ـ با کمك استقراء ثابت کنید :

الف ـ $n^3 < 3^n, n \geqslant 4$ ب ـ $n^2 < 2^n, n > 4$

ج ـ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^n-1} < \frac{n}{2}, n \geqslant 3$ د ـ $2^n < n!, n \geqslant 4$

۴ ـ با کمك استقراء ثابت کنید :

الف ـ تعداد اقطار هر n ضلعی محدب برابر است با $\frac{n(n-3)}{2}$

ب ـ مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب برابراست با $(n-2)180^\circ$

۵ ـ هرگاه n عدد طبیعی و a و b مثبت باشند ثابت کنید : $a<b \Rightarrow a^n<b^n$

۶ ـ هرگاه f تابع حقیقی بوده و $f_1=f$ و $f_n=f \circ f_{n-1}$ با استقراء ثابت کنید :

الف ـ اگر $f(x)=bx+a$ و $b \neq 1$ آنگاه $f_n(x)=a\frac{b^n-1}{b-1}+b^n x$

ب ـ اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ آنگاه $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

۷ـ ثابت کنید به‌ازاء هرعددطبیعی n دوعددطبیعی k و l هستند به‌طوری که $n=5k-7l$.

۸ـ ثابت کنید به ازاء هرعدد طبیعی n، $\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} \in \mathbb{N}$.

۹ـ به استقراء ثابت کنید، x ،$y \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ و $x+y \geqslant 0$

الف ـ $(1+a)^n \geqslant 1+na \quad a \geqslant -1$

ب ـ $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ ج ـ $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leqslant \frac{x^n+y^n}{2}$

د ـ $2^{\frac{n(n+1)}{2}} > n!$ هـ ـ $1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1) \leqslant n^n$

تقسیم

اگرچه تمام اعداد صحیح بریکدیگر بخش‌پذیر نیستند ولی خاصیت زیربرای کلیه اعداد صحیح برقرار است.

قضیه ـ برای هردوعدد صحیح a و $b \neq 0$ عددهای صحیح منحصربفرد q و r یافت‌میشود به گونه‌ای که $0 \leqslant r < |b|$ و $a=bq+r$. در اینصورت q را خارج‌قسمت و r را باقیمانده یا مانده این تقسیم می‌نامند.

برهان- فرض می‌کنیم a و b دو عدد صحیح و معین باشند آنگاه مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$T=\{a-bx \mid x\in\mathbb{Z} , a-bx \geqslant 0\}$$

نشان می‌دهیم که $T\neq\varnothing$، یعنی حداقل شامل یک عضو $t\geqslant 0$ است. اگر فرض کنیم $t=a-b(\pm|a|)$ آنگاه $t\geqslant 0$ زیرا:

الف- اگر $b>0$ پس $b\geqslant 1$ و $|a|\geqslant -a$ اگر طرفین را ضرب کنیم داریم $t=a+b|a|$ که مثبت یا صفر است.

ب- اگر $b<0$ پس $b\leqslant -1$ یا $-b\geqslant 1$ و $|a|\geqslant -a$ از ضرب طرفین نامساوی داریم $t=a-b|a|$ که بازهم مثبت یا صفر است.

درنتیجه T غیرتهی است و نیز $T\subset\mathbb{Z}$ و 0 یک کران پائین آن است، پس بنابرقضیه خوانده شده دارای عضو ابتدا است که آنرا r می‌نامیم یعنی $r\in T$ و $r\geqslant 0$ بنابراین $q\in\mathbb{Z}$ یافت می‌شود به طوریکه

$$r=a-bq \Longrightarrow a=bq+r$$

حال ثابت می‌کنیم $r<|b|$، اگر $r<|b|$ نباشد آنگاه $r\geqslant|b|$ و یا $r-|b|\geqslant 0$ اگر بجای r مساوی آن $a-bq$ را قرار دهیم خواهیم داشت.

$$r-|b|=a-bq-|b|=a-b(q\pm 1)$$

و چون $(q\pm 1)\in\mathbb{Z}$، بنابراین $r-|b|\in T$. اما r عضو ابتدای T بود؛ پس $r-|b|\geqslant r$، و این نشدنی است زیرا $|b|$ یکعدد طبیعی است. لذا، $r\geqslant|b|$ درست نیست یعنی $r<|b|$.

برای اثبات منحصر بفرد بودن q و r، گوئیم چون r عضو ابتدای T است منحصر بفرد می‌باشد و درنتیجه q نیز منحصربفرد خواهد بود.

مثال- اگر $a=-17$ و $b=5$ آنگاه $-17=5(-4)+3$

مثال- اگر b عددی طبیعی باشد بنابرقضیه تقسیم هر عدد صحیح نمایش منحصر بفردی بصورت $nb+r$ دارد که در آن r یکی از اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ... و $(b-1)$ است. بنابراین هرعدد صحیح را فقط به‌یکی ازصورتهای زیر می‌توان نوشت :

$$nb , nb+1 , nb+2 , nb+3 , \ldots\ldots nb+(b-1)$$

بویژه اگر $b=2$ باشد هرعدد صحیح به‌یکی ازدو صورت $2n$ و $2n+1$ نوشته میشود که $2n$ نمایش عدد زوج و $2n+1$ نمایش عدد فرد درحالت کلی است.

بخش‌پذیری در $\mathbb{Z}$

تقسیمهای زیر را درنظر بگیرید:

$$(-15)\div(-3) \quad , \quad (-12)\div 5 \quad , \quad 17\div 3 \quad , \quad 8\div 2$$

درکدامیك از این تقسیمها باقیمانده صفر و درکدامیك باقیمانده مخالف صفراست؟

هرگاه باقیمانده تقسیم صفر شد، مقسوم برمقسوم‌علیه بخش‌پذیر است.

تعریفــ عدد صحیح a را برعدد صحیح $b\neq 0$ بخش‌پذیر نامیم، هرگاه عددصحیحی مانند q یافت‌شود به‌گونه‌ای که $a=bq$. در اینصورت می‌نویسیم $b|a$ و به‌صورتهای زیر می‌خوانیم : a بر b بخش‌پذیـر است. b عدد a را میشمرد (عاد میکند). a مضرب b است. b یك سازه (عامل) a می‌باشد. b یك شمارنده a است. b مقسوم‌علیه a است.

نقیض $b\,|\,a$ را به‌صورت $b\nmid a$ نمایش میدهیم.

به‌آسانی دیده‌می‌شود که: الف) صفر برعدد $b\neq 0$ بخش‌پذیراست و ب) اعداد ۱ و ۱ــ هرعدد صحیحی را می‌شمرند. (چرا؟)

روشن است کــه بخش‌پذیری، یك‌رابطه در $\mathbb{Z}$ می‌باشد و این رابطه : انعکاسی است زیرا برای هرعدد صحیح a داریم $a=a\times 1$. پس $a\,|\,a$ متعدی است، زیرا اگر $a\,|\,b$ و $b\,|\,c$ و آنگاه $a\,|\,c$.

چون:
$$a\,|\,b \Longrightarrow \exists q\in\mathbb{Z} \;:\; b=aq$$

و
$$b\,|\,c \Longrightarrow \exists q'\in\mathbb{Z} \;:\; c=bq'$$

در نتیجه :
$$c=bq'=(aq)q'=a(qq')=aq_1$$

$(q_1=qq')$ پس $a\,|\,c$ ، امــا این رابطه متقارن نیست ، زیرا برای مثال $2\,|\,6$ ولی $6\nmid 2$ ، ضد متقارن نیست، زیرا برای مثال $2\,|\,-2$ و $-2\,|\,2$ ولی $2\neq -2$.

ویژگیهای ابتدایی بخش‌پذیری در $\mathbb{Z}$

قضیه: هرگاه a ، b و c سه‌عدد صحیح دلخواه باشند:

۱ــ اگر $a\,|\,b$ ، آنگاه : الف) $-a\,|\,b$ ، ب) $a\,|\,-b$ ، ج) $-a\,|\,-b$.

۲ ــ برای هر $b\neq 0$ اگر $a\,|\,b$ ، آنگاه: الف) برای‌هر $m\in\mathbb{Z}$ ، $a\,|\,mb$ ب) $|a|\leqslant|b|$.

۳ــ اگر $a\,|\,1$ ، آنگاه $a=\pm 1$ (تنها شمارنده‌های‌عدد ۱، اعداد ۱ و ۱ــ می‌باشند.)

۴ــ اگر $a\,|\,b$ و $b\,|\,a$ ، آنگاه $a=\pm b$.

۵ــ اگر $a\,|\,b$ و $a\,|\,c$ ، آنگاه $a\,|\,b\pm c$.

برهان

۱ــ اگر $a\,|\,b$ بنا به‌تعریف $b=aq$ درنتیجه
$$b=aq=(-a)(-q)$$

و نیز
$$-b=a(-q)=(-a)q$$

یعنی الف ، ب ، ج برقرارند.

۲- از $a \mid b$ داریم $b=aq$ ، درنتیجه:

الف) $b=aq \Rightarrow mb=m(aq)=a(mq) \Rightarrow a \mid mb$

ب) $b=aq \Rightarrow |b|=|aq|=|a|\cdot|q|$

چون $b \neq 0$ در نتیجه $q \neq 0$ و $|q| \geqslant 1$ پس $|b|=|a|\cdot|q| \geqslant |a|$

۳- اگر $a \mid 1$ بنابر (۲ب) داریم $|a| \leqslant 1$ یعنی $|a|=0$ یا $|a|=1$، اما اگر $|a|=0$ آنگاه $a=0$ ولی $0 \nmid 1$، پس $|a|=1$، درنتیجه $a=\pm 1$.

۴- اگر $a \mid b$ و $b \mid a$، آنگاه داریم:

$$a \mid b \Longrightarrow |a| \leqslant |b|$$

$$b \mid a \Longrightarrow |b| \leqslant |a|$$

درنتیجه $|a|=|b|$، بنابراین $a=\pm b$.

۵- اگر $a \mid b$، $a \mid c$، آنگاه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \Longrightarrow \exists\, q \in \mathbb{Z} : b=aq \\ a \mid c \Longrightarrow \exists\, q' \in \mathbb{Z} : c=aq' \end{array}\right\} \Longrightarrow b \pm c = a(q \pm q')$$

یعنی $a \mid b \pm c$.

بزرگترین شمارنده مشترک (بزرگترین مقسوم علیه مشترک)

اگر a و b دو عدد صحیح باشند عدد d را شمارنده مشترک آنها می گویند اگر $d|b$ و $d|a$.
و مجموعه مقسوم علیه‌های مثبت a و b عبارت است از $S=\{d \mid d>0\ d|a \wedge d|b\}$
چون عدد یك کلیه اعداد صحیح را میشمارد پس عدد ۱ شمارنده مشترك مثبت هردو عدد a و b می‌باشد. لذا مجموعه شمارنده‌های مشترك مثبت a و b غیرتهی است. اگر a و b هردوصفر باشند، مجموعه شمارنده‌های‌مشترك مثبت‌آنها نامتناهی می‌شود. اما اگرحداقل یکی از آنها مخالف‌صفر باشد (مثلاً $a \neq 0$) دراینحالت شمارنده‌های مشترك مثبت a و b بایستی کوچکتریا مساوی $|a|$ باشند. یعنی مجموعه شمارنده‌های مشترك مثبت دو عدد a و b کراندار ازبالا، خواهدبود عضو انتهای‌این‌مجموعه‌راکه وجود داردبزرگترین‌شمارنده مشترك‌دوعددa وb گویند. تعریف‌بزرگترین شمارنده مشترك رابصورت زیر نیزمیتوان بیان نمود.

تعریف : اگر a و b دوعدد صحیح بوده و حداقل یکی‌ازآنها مخالف صفرباشد، بزرگترین شمارنده مشترك این دو عدد که با (a و b) نمایش میدهند عبارتست ازعدد طبیعی d بطوریکه :

الف) $d|a$ و $d|b$ ب) اگر $c|a$ و $c|b$ آنگاه $c \leqslant d$

و یاهر مقسوم علیه a و b مقسوم علیه d وهر مقسوم علیه d مقسوم علیه a و b باشد .

مثال ۱ـ شمارنده‌های مثبت ۱۲ ــ عبارتند از: ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۶ ، ۱۲ و شمارنده‌های مثبت ۳۰ عبارتند از: ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۶ ، ۱۰ ، ۱۵ ، ۳۰ و لذا شمارنده‌های مشترک مثبت آنها اعداد ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۶ ، هستند که بزرگترین آنها ۶ می‌باشد ، یعنی $۶ = (۳۰ ، ۱۲ -)$.

مثال ۲ـ اگر $a \mid b$ آنگاه $|a| = (a و b)$.

زیرا هر مقسوم‌علیه $|a|$ یك مقسوم‌علیه مشترك a و b است حال اگر c یك مقسوم‌علیه مشترك a و b باشد $c \mid a$ و یا $c \mid |a|$ ، پس هر مقسوم‌علیه مشترك a و b یك مقسوم‌علیه $|a|$ است ، بنابراین : $|a| = (a و b)$.

تعریف ــ دوعدد صحیح a و b را نسبت بههم اول گویند، هرگاه $۱ = (a و b)$.

مثال ــ اعداد ۴ و ۹ نسبت بهم اولند زیرا $۱ = (۴ و ۹)$، ولی ۶ و ۹ نسبت بههم اول نیستند چون $(۶ و ۹) = ۳$.

قضیه ــ اگر a و b دوعدد صحیح باشند بطوریکه حداقل یکی از آنها صفر نباشد آنگاه عددــ های صحیح r و s یافت میشوند به گونه‌ایکه: $(a و b) = ra + sb$

برهان ــ فرض می‌کنیم A مجموعه تمام اعداد طبیعی باشد که بتوان بصورت $ma + nb$ با $m و n \in Z$ نوشت (اعضای مجموعه A را ترکیبات خطی صحیح و مثبت a و b می‌نامند) .

$$A = \{ma + nb : ma + nb > ۰ و m, n \in Z\}$$

چون حداقل یکی از دو عدد غیرمنفی $|b| = \pm ۱ \times b + ۰ \times a$ و $|a| = \pm ۱ \times a + ۰ \times b$ مخالف صفر است پس $A \neq \varnothing$ و $A \subset N$ در نتیجه A دارای عضو ابتدا است که آنرا d مینامیم، پس اعداد صحیح r و s وجود دارند بطوریکه $۰ < d = ra + sb$. (۱)

حال ثابت می‌کنیم d بزرگترین شمارنده مشترك a و b است.

a را بر d تقسیم می‌کنیم، بنابر الگوریتم تقسیم اعداد منحصر بفرد q و t یافت میشوند بطوریکه

$$a = dq + t \quad و \quad ۰ \leqslant t < d$$

اگر $t > ۰$ با توجه به (۱) داریم: $t = a - dq = a - raq - sbq = a(۱ - rq) + b(-sq)$

یعنی عدد $t \in A$ که متناقض با عضو ابتدا بودن d می‌باشد. پس $t = ۰$ یعنی $d \mid a$ بهمین ترتیب $d \mid b$ یعنی d شمارندهٔ مشترك a و b است.

حال اگر $x \mid a$ و $x \mid b$ ، نتیجه میشود $x \mid ra + sb$ یعنی $x \mid d$ پس $x \leqslant d$ یعنی d بزرگترین شمارنده مشترك میباشد.

مثال: $(۱۲ و ۳۲) = ۴ = (-۱) \times ۳۲ + ۳ \times ۱۲$

نتایج زیر از قضیه فوق بدست میآید:

نتیجه ۱ ــ اگر a و b نسبت بهم اول باشند یعنی $۱ = (a و b)$ آنگاه اعــداد صحیح r و s بگونه‌ای یافت میشوند که : $ra + sb = ۱$

نتیجه ۲ـ بالعکس اگر $ra+sb=1$ آنگاه $(a \text{ و } b)=1$ زیرا اگر $c=(a \text{ و } b)$ آنگاه $c|ra$ و $c|sb$ پس $c|1$ یعنی $c=1$.

نتیجه ۳ـ $A=\{ma+nb : m \text{ و } n\in Z\}$ مجموعه‌تمام مضارب،بزرگترین شمارنده مشترك a و b می‌باشد. یعنی اگر $d=(a \text{ و } b)$ ، آنگاه $A=\{dt : t\in Z\}$ (چرا؟)

نتیجه ۴ـ (لم‌اقلیدس)ـ اگر $a\mid bc$ و $(a \text{ و } b)=1$ ، آنگاه $a\mid c$

برهان ـ بنابرنتیجه(۱)، اعداد s و t یافت میشوند به‌گونه‌ایکه $as+bt=1$

پس: $c=cas+cbt$

اماچون $a\mid bc$ ، طبق تعریف‌عدد صحیح m وجوددارد بطوریکه $bc=ma$

پس: $c=cas+mat=a(cs+mt)$

درنتیجه $a|c$.

نتیجه ۵ـ اگر $(a \text{ و } b)=d$ و $k\in \mathbb{N}$ آنگاه $(ka \text{ و } kb)=kd$ چرا؟

برهان ـ فرض کنیم $(ka \text{ ، } kb)=d_1$ ، طبق فرض داریم: $d|a\wedge d|b$ یا $kd|ka\wedge kd|kb$ پس $kd|d_1$ یا $kd\leqslant d_1$ (۱) ازطرفی داریم:

$$ra+sb=d \Longrightarrow r(ka)+s(kb)=kd$$

وچون d_1 را بزرگترین مقسوم علیه مشترك ka و kb گرفتیم پس d_1 ترکیب خطی ka و kb یعنی kd را می‌شمرد: $d_1|kd$ یا $d_1\leqslant kd$ (۲) ازمقایسه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $d_1=kd$.

قضیهـ اگر $d=(a \text{ و } b)$، آنگاه $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ نسبت بهم‌اولند.

برهان ـ

$$(a,b)=d \Longrightarrow ra+sb=d$$

با توجه به نتیجه ۲:

$$\therefore\ r\frac{a}{d}+s\frac{b}{d}=1 \Longrightarrow \left(\frac{a}{d} \text{ و } \frac{b}{d}\right)=1$$

قضیه ـ اگر $(a \text{ و } b)=1$ و $(a \text{ و } c)=1$ آنگاه $(a \text{ و } bc)=1$.

برهان ـ چون $(a \text{ و } b)=1$ پس $ra+sb=1$ و $rac+sbc=c$ و یا $(rc)a+s(bc)=c$

این تساوی نشان میدهد که مقسوم علیه مشترك a و bc عدد c را می‌شمارد ولی $(a \text{ و } c)=1$ پس $(a \text{ و } bc)=1$.

مفهوم بزرگترین شمارنده مشترك‌چند عددصحیح را نیزمی‌توان بطور طبیعی تعریف نمود اما از بحث‌بیشتر دراین مورد خودداری می‌شود.

الگوریتم اقلیدسی[1]

الگوریتم اقلیدسی روشی برای تعیین ب م م دو عدداست که می‌توان آن را بعنوان قضیه وجود ب م م دوعدد ، بیان نمود.[2]

قضیه (الگوریتم اقلیدسی)ــ فرض کنید a و b دوعدد طبیعی باشد.

الف) دسته‌هائی از اعداد صحیح غیرمنفی مانند $r_1, r_2, \cdots, r_n$ و $q_0, q_1, q_2, \cdots, q_n$ وجود دارند بطوریکه :

$$a = bq_0 + r_1 \qquad 0 \leqslant r_1 < b$$
$$b = r_1q_1 + r_2 \qquad 0 \leqslant r_2 < r_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n \qquad 0 \leqslant r_n < r_{n-1}$$
$$r_{n-1} = r_nq_n$$

ب) r_n ب م م اعداد a ، b است.

ج) دو عدد صحیح r و s وجود دارند بطوریکه : $(a , b) = r_n = ra + sb$.

برهان **الف** ــ عدد a را بر b تقسیم می‌کنیم بنابرقضیهٔ تقسیم q_0 و r_1 وجود دارد که :

$$(1)\ \ a = bq_0 + r_1 \qquad 0 \leqslant r_1 < b$$

اگر $r_1 = 0$ آنگاه $b | a$ و $(a , b) = b$ و اگر $r_1 \neq 0$ باشد عدد b را بر r_1 تقسیم می‌کنیم ، عددهای q_1 ، r_2 هست که :

$$(2)\quad b = r_1q_1 + r_2 \qquad 0 \leqslant r_2 < r_1$$

اگر $r_2 = 0$ باشد بنابر (۱) هرمقسوم علیه مشترك a و b یك مقسوم علیه مشترك b و r_1 است و بالعکس، بنابراین $(a و b) = (b و r_1) = r_1$. حال اگر $r_2 \neq 0$ باشد عدد r_1 را بر r_2 تقسیم می‌کنیم بالنتیجه :

$$(3)\quad r_1 = r_2q_2 + r_3 \qquad 0 \leqslant r_3 < r_2$$

بهمین ترتیب این عمل را ادامه میدهیم بالاخره به مرحله‌ای میرسیم که باقیمانده صفر می‌شود زیرا $\cdots\ b > r_1 > r_2 >$ و r_1 و r_2 و .... نزولی هستند وحداکثر بعداز b مرتبه به‌صفر میرسد. فرض کنید r_{n+1} اولین باقیمانده‌ای باشدکه صفر است .

در اینصورت خواهیم داشت :

$$(1)\qquad a = bq_0 + r_1 \qquad\qquad 0 \leqslant r_1 < b$$

---

۱ ــ الگوریتم ، که از نام کلمهٔ الخوارزمی (وفات‌حدود ۲۲۵ هجری شمسی) ریاضیدان معروف ایرانی گرفته شده است ، به مجموعه اعمال متوالی و ترتیبی اطلاق‌می گردد که در آن هر عمل از عمل قبلی‌خود به دست آمده باشد (فن محاسبه)

۲ــ بزرگترین مقسوم علیه مشترك .

$$(2) \quad b = r_1 q_1 + r_2 \qquad 0 \leqslant r_2 < r_1$$

.

.

$$(n-1) \quad r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-2} + r_{n-1} \qquad 0 \leqslant r_{n-1} < r_{n-2}$$

$$(n) \quad r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n \qquad 0 \leqslant r_n < r_{n-1}$$

$$(n+1) \quad r_{n-1} = r_n q_n$$

برهان بــ ثابت می‌کنیم $r_n = (a \text{ و } b)$. فرض می‌کنیم $d = (a \text{ و } b)$چون $d|a$ و $d|b$ بنابر (۱)، $d \mid r_1$ و بنابر (۲)، $d \mid r_2$ ..... بنابر (n)، $d \mid r_n$ (I)

از طرف دیگر بنابر (n+۱)، $r_n | r_{n-1}$ و بنابر (n)، $r_n | r_{n-2}$ ..... بنا بر (۲) $r_n | b$ و بنابر (۱) $r_n \mid a$ پس r_n یك مقسوم علیه مشترك b و a است در نتیجه $r_n \mid d$ (II) وباتوجه‌به (I) و (II) نتیجه میشود $(a \text{ و } b) = r_n$.

برهان جــ برای بدست آوردن r و s ابتدا از رابطه (n)، r_n را محاسبه می‌کنیم.

$$r_n = r_{n-2} - r_{n-1} q_{n-1}$$

دراین تساوی بجای r_{n-1} مساویش را از رابطه (n − ۱) قرار میدهیم خواهیم داشت :

$$r_n = r_{n-2} - (r_{n-3} - r_{n-2} q_{n-2}) q_{n-1}$$

وبهمین ترتیب بجای r_{n-2} مساویش را از تساوی بالاتر یعنی (n − ۲) قرار خواهیم داد و عمل را ادامه میدهیم تابه a و b برسیم ، در اینصورت r_n برحسب a و b محاسبه می‌شود و بصورت زیر در می‌آید:

$$r_n = ra + sb$$

و چون $r_n = (a \text{ و } b)$ است پس $(a \text{ و } b) = ra + sb$ میشود.

مثال : اولا ثابت کنید ۴۳ = (۶۰۲ و ۱۰۷۵) ، ثانیاً اعداد صحیح r و s را طوری پیداکنید که : ۴۳ = ۱۰۷۵r + ۶۰۲s شود .

بنابر الگوریتم اقلیدسی داریم :

(۱) ۱۰۷۵ = ۶۰۲ × ۱ + ۴۷۳

(۲) ۶۰۲ = ۴۷۳ × ۱ + ۱۲۹

(۳) ۴۷۳ = ۱۲۹ × ۳ + ۸۶

(۴) ۱۲۹ = ۸۶ × ۱ + ۴۳

(۵) ۸۶ = ۴۳ × ۲

بنابراین ۴۳ = (۶۰۲ و ۱۰۷۵)

برای بدست آوردن r و s چنین عمل می‌کنیم :

از رابطه (۴) ۴۳ را حساب می‌کنیم $۴۳ = ۱۲۹ - ۸۶ \times ۱$ (I)

و از رابطه (۳) ۸۶ را حساب می‌کنیم و در (I) قرار میدهیم.

$$۴۳ = ۱۲۹ - (۴۷۳ - ۱۲۹ \times ۳) \times ۱$$

و یا:

$$۴۳ = ۱۲۹ \times ۴ - ۴۷۳ \times ۱ \quad (II)$$

وبهمین ترتیب از رابطه(۲) ۱۲۹ راحساب می‌کنیم و در(II) قرار میدهیم.

$$۴۳ = (۶۰۲ - ۴۷۳ \times ۱) \times ۴ - ۴۷۳ \times ۱$$

ویا:

$$۴۳ = ۶۰۲ \times ۴ - ۵ \times ۴۷۳ \quad (III)$$

و از رابطه (۱) ۴۷۳ را حساب می‌کنیم و در (III) قرار میدهیم.

$$۴۳ = ۶۰۲ \times ۴ - ۵(۱۰۷۵ - ۱ \times ۶۰۲)$$

$$۴۳ = ۹ \times ۶۰۲ - ۵ \times ۱۰۷۵$$

$$۴۳ = (-۵) \times ۱۰۷۵ + ۹ \times ۶۰۲$$

دراینصورت $r = (-۵)$ و $s = ۹$ است.

کوچکترین مضرب مشترك

فرض کنید که a و b اعداد صحیحی باشند و c عدد صحیحی باشد که $a | c$ و $b | c$ در اینصورت c را مضرب مشترك a و b می‌خوانیم. بدیهی‌است‌که اگر a یا b صفر باشد مضرب مشترك آنها صفر خواهد بود. بنابراین فرض می‌کنیم a و b مخالف صفر باشند.

فرض می‌کنیم S مجموعهٔ مضربهای مشترك مثبت a و b باشد یعنی:

$$S = \left\{ c \mid c > ۰ \ ، a | c ، b | c \right\}$$

$S \neq \varnothing$ است زیرا $|ab| \in S$ است وچون S زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی است ازاینرو بنابر اصل خوش‌ترتیبی دارای عضو ابتدا است. **بنابر تعریف عضو ابتدای مجموعه S یعنی مجموعه مضربهای مشترك مثبت اعداد a و b را کوچکترین مضرب مشترك a و b می‌نامیم** وبا [a و b]نمایش میدهیم . تعریف دیگرکوچکترین مضرب‌مشترك دوعددرا در زیـر بیان می‌کنیم.

تعریف- کوچکترین مضرب مشترك دوعدد a و b (a و b مخالف صفر) عبارت‌است ازعدد صحیح و مثبت c بطوریکه: (الف) $a | c$ و $b | c$ (ب) اگر $m > ۰$ و $a | m$ و $b | m$ آنگاه $c \leqslant m$.

بعبارت دیگر هر مضرب مشترك a و b مضرب c است و هر مضرب c مضرب مشترك a و b است.

تبصره ـ اگر $a | b$ آنگاه $[a, b] = |b|$ است.

مثال ـ مضربهای مشترك مثبت دو عدد ۱۲ـ و ۳۰ عبارتنداز: ۶۰ ، ۱۲۰ ، ۱۸۰ ، ... و بنابراین ۶۰ = [۳۰ ، ۱۲ـ].

قضیه ـ اگر $[a و b] = c$ و m هم‌مضرب مشترکی برای a و b باشد، آنگاه $c|m$.

برهان ـ m را بر c تقسیم می‌کنیم، بنابرالگوریتم تقسیم اعداد منحصربفرد q و r یافت می‌شوند بگونه‌ایکه $0 \leqslant r < c$ و $m = cq + r$.

اگر $r \neq 0$ ، چون $a|m$ و $a|c$ آنگاه $a|m - cq$ یعنی $a|r$ وبهمین‌ترتیب $b|r$ یعنی r هم مضرب مشترك a و b می‌باشد، پس $r \geqslant c$ که متناقض با تعریف r می‌باشد. پس $r = 0$ یعنی $m = cq$ یا $c|m$.

قضیه ـ برای هر دوعدد صحیح غیرصفر a و b داریم: $|ab| = (a و b)[a و b]$.

برهان ـ در اثبات این قضیه بدون اینکه به کلی بودن استدلال لطمه‌ای وارد آید می‌توان a و b را مثبت در نظر گرفت، (چرا؟)

فرض‌می‌کنیم $(a, b) = d$ بنابراین $a = da'$ و $b = db'$ و اگر $c = \frac{ab}{d}$ باشد در این صورت $c = ba' = ab'$ یعنی c مضرب‌مشترك a و b است پس‌خاصیت (الف) تعریف برقرار است.

حال فرض می‌کنیم m نیز مضرب a و b باشد در اینصورت

$$m = ak = bk' \quad (۱)$$

و چون d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b است بنابراین

$$d = ra + sb$$

و

$$md = m(ra + sb) = mra + msb$$

و با توجه به رابطه (۱)

$$md = bk'ra + aksb$$

و یا

$$md = ab(k'r + sk)$$

و چون $ab = cd$ پس

$$md = cd(k'r + sk)$$

و یا

$$m = c(k'r + sk)$$

یعنی $c|m$ و یا $c \leqslant m$ یعنی خاصیت (ب) برقرار است پس c کوچکترین مضرب مشترك a و b است بنابراین $[a و b] = \frac{ab}{(a و b)}$ ویا $(a و b)[a و b] = ab$ یا $[a,b](a,b) = |ab|$

مفهوم کوچکترین مضرب مشترك چندعددصحیح رانیزمی‌توان بطورطبیعی تعمیم داد.

قضیه ـ $ab|c \Longleftarrow (a|c \wedge b|c$ و $(a, b) = 1)$.

برهان ـ داریم (۱) $c = aq_1$ و (۲) $c = bq_2$ درنتیجه (۳) $aq_1 = bq_2$. a طرف چپ (۳) را می‌شمرد پس‌طرف راست را می‌شمرد وچون با b اول‌است پس q_2 را می‌شمرد یعنی $a | q_2$ ویا $q_2 = aq_3$ بجای q_2 در (۲) قرار می‌دهیم می‌شود: $c = abq_3$ یعنی $ab|c$.

اعداد اول

میدانیم که هرعدد صحیح $a>1$ براعداد طبیعی ۱ و a بخش‌پذیراست. هرگاه این اعداد تنها شمارنده‌های مثبت عدد a باشند ، a را اول گویند.

تعریف- عدد صحیح $p>1$ را عدد اول گویند اگر تنها شمارنده‌های مثبت آن ۱ و p باشند.

هر عدد طبیعی مخالف ۱ که اول نباشد را عدد تجزیه پذیر نامند .

مثال- اعداد ۲،۳،۵ و ۷، اول و ۴،۶،۸،۹ تجزیه پذیر می‌باشند.

قضیه- اگر p عدد اول باشد و $p \mid ab$ آنگاه $p \mid a$ یا $p \mid b$.

برهان- اگر $p \nmid a$ آنگاه $(p, a)=1$ (چرا؟) و درنتیجه بنابر لم اقلیدس $p \mid b$.

قضیه- هرعدد طبیعی $a \neq 1$، حداقل دارای یک‌شمارنده اول‌می‌باشد.

برهان- مجموعه $\{n : n \in \mathbb{Z}, n>1, n \mid a\}$ را در نظر میگیریم. این زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی است وچون $a \neq 1$ ، پس a عضوی از آن مجموعه می‌باشد، لذا غیر تهی است ودر نتیجه براساس اصل خوشترتیبی دارای عضو ابتدا است. این عضو ابتدا را p می‌نامیم و ثابت می‌کنیم p اول است .

اگر p اول نباشد، آنگاه تجزیه پذیر است ولذا دارای‌شمارنده مثبتی بجز ۱ و p می‌باشد. این شمارنده را q می‌نامیم. بنابر (۲ب) از قضیه بخش‌پذیری در $\mathbb{Z}$، $q<p$ و بنابه خاصیت تعدی بخش‌پذیری $q \mid a$، یعنی q هم متعلق به مجموعه مورد نظر ما می‌باشد که این با عضو ابتدا بودن p تناقض دارد و درنتیجه p اول می‌شود.

قضیه بنیادی حساب- هرعددطبیعی $n>1$ وغیر اول‌رامی‌توان‌به‌صورت $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ نوشت که درآن $p_1, p_2, \ldots, p_k$ عددهای اول هستند. به‌عبارت دیگر n را میتوان به‌حاصلضرب عاملهای اول تجزیه نمود.

برهان- فرض‌می کنیم X مجموعه اعدادطبیعی غیراول باشدکه بزرگتر از ۱ بوده و نتوان آنهارا به‌عوامل اول تجزیه نمود. باید ثابت‌کنیم که $X = \varnothing$ هرگاه $X \neq \varnothing$، $X \subseteq N$ ،درنتیجه X دارای‌عضوابتدا مانند a می باشد . بنا به‌تعریف X ، $a>1$ و درنتیجه بنا بر قضیه قبل‌عدداولی مانند p یافت می‌شود، بگونه‌ایکه $p \mid a$. فرض می کنیم $a = pb$ ، چون $p>1$ درنتیجه $b<a$ بنابراین $b \notin X$ یعنی b را میتوان به‌عوامل‌اول تجزیه‌نمود. برای‌مثال $b = q_1 q_2 \cdots q_r$ و درنتیجه $a = pq_1 q_2 \cdots q_r$ ، یعنی a به‌عوامل اول تجزیه مـی‌شود که با فرض $a \in X$ متناقـض است . بنابراین $X = \varnothing$.

تبصره۱- شکل $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ را تجزیه‌به عاملهای‌اول ، و p_1، p_2، ...، p_k راعاملهای اول عدد n می‌نامیم. در حالت‌کلی یک‌عامل‌اول ممکن است بیش‌ازیکبار ظاهر شود برای مثال:

$12 = 2 \times 2 \times 3$ که اگر عاملهای تکراری را کنارهم نوشته و از توان استفاده شود آنرا می‌توان بصورت $2^2 \times 3^1$ نوشت.

بطور کلی هر عدد طبیعی n را می‌توان به‌شکل زیر تجزیه کرد:

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$$

که درآن p_1 ، p_2 ، ... ، p_k اعداد اول متفاوت و n_k ها اعداد صحیح غیر منفی خواهند بود.

مثال- $4320 = 2^5 \times 3^3 \times 5^1$.

تبصره۲ - اگر $n \neq -1$ عددصحیح‌منفی باشد، $-n$ مثبت‌خواهد بود بنابراین‌طبق‌تبصره ۱ می‌توان نوشت:

$$-n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$$

یا:

$$n = -p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$$

و بطور کلی برای هرعدد صحیح غیر صفرn، میتوان‌نوشت:

$$n = \pm p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$$

که درآن p_k ها اعداد اول‌متفاوت و n_kها اعدادصحیح‌غیر منفی می‌باشند($p \neq 1$) بحث‌اعداد اول یکی از مباحث اصلی نظریه اعداد است وکاربردهایی‌هم درمسائل دیگرریاضی داردکه ارائه آنها ازحدود این‌کتاب خارج است.

قضیه - مجموعهٔ اعداد اول نامتناهی است.

برهان - فرض کنیم p_1، p_2، ...، p_n اعداد اول‌باشند وگفته شود که اعداد اول فقط این هاست ثابت می‌کنیم که عدد اولی غیراز اینها نیز وجود دارد. برای این منظور حاصلضرب این اعداد اول را P می‌نامیم

$$P = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n \qquad (p_1 = 2 \text{ و } p_2 = 3, \ldots)$$

به طرفین این تساوی عدد ۱ را اضافه می‌کنیم

$$P + 1 = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$$

$P+1$ دارای عامل‌اولی‌غیراز p_1، p_2، ... p_n است زیرا، اگر این عامل اول یکی ازعاملهای P باشد، آنگاه P را می‌شمرد، $P+1$ را هم که می‌شمرد لذا تفاضل $P+1$ از P یعنی ۱ را می‌شمرد و این نشدنی است.

قضیه - اگر $n > 1$ عدد صحیح غیر اول باشد آنگاه عدد اولی مانند p وجود داردکه:

$$p \leqslant \sqrt{n}\,, \quad p|n$$

برهان - چون n اول نیست اعداد صحیح مثبت a و b وجود دارند بطوریکه:

$$2 \leqslant a \leqslant b < n, \quad n = ab$$

بنابراین $n = ab \geqslant a^2$ و یا $\sqrt{n} \geqslant a$؛ فرض می‌کنیم p عددی اول باشد که $p|a$ دراینصورت

$p|n$ و درنتیجه $p \leqslant a \leqslant \sqrt{n}$ خواهد بود.

نتیجه - از قضیه فوق برای اینکه تحقیق کنیم عدد صحیح n کـه $n > ۱$ اول است یا نه کافی‌است تحقیق کنیم که n براعداد اول p که $p \leqslant \sqrt{n}$ است بخش‌پذیراست یا نه و باین‌ترتیب تا حد زیادی تعیین اینکه عددی اول است یا نه آسانترمی‌شود.

مثال - آیا عدد $n = ۲۷۱$ اول است؟ می‌دانیم $۱۷ > \sqrt{۲۷۱} > ۱۶$ و بنابراین یا ۲۷۱ اول است یـا عدد اولی مانند p که $p \leqslant ۱۶$ باشد وجود داردکـه $p|۲۷۱$ بنابراین کافی است بخش‌پذیری ۲۷۱ را بر اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ و ۱۳تحقیق کنیم که درمورد۲۷۱ملاحظه‌می‌شود ۲۷۱ اول است.

تبصره: غربال اراتستن با استفاده از همین روش بدست‌آمده است.

تمرین

۱- ثابت کنید

$a|b \Longrightarrow a^n|b^n$ ؛ $a|b \Longrightarrow a^۲|b^۳$ ؛ $۵|۲n+۱ \Longrightarrow ۲۵|۱۴n^۲+۱۹n+۶$

۲- ثابت کنید هرعدد فرد را می‌توان به‌یکی ازصورتهای $۴n+۱$، $۴n+۳$ ومربع آن را به صورت $۸n+۱$ نوشت.

۳- ثابت کنید $((a, b), c) = (a, (b, c))$.

۴- $|a| = [a, (a, b)] = (a, [a, b])$.

۵- $۲|n^۲-n$ و $۶|n^۳-n$ واگر m و n فردباشند آنگاه $۸|m^۲-n^۲$، $۸|m^۴+n^۴-۲$

۶- اگر $sx-ry = \pm ۱$، آنگاه ثابت کنید: $(ax+by$ و $ar+bs) = (a, b)$.

۷- ثابت کنید: $۱۵|۲^{۴n}-۱$، $۳|n^۳+۲n$.

۸- اگر a و b دوعدد صحیح‌باشند که حداقل یکی‌ازآنها صفرنباشد ، ثابت کنید:

$(a$و$b) = (-a$و$b) = (a$و$-b) = (-a$و$-b)$

۹- ثابت کنید، هرگاه $(a$و$b) = ۱$ و $c|a$، آنگاه $(c$و$b) = ۱$.

۱۰- اگر $(a$و$b) = d$ و $d'|d$، آنگاه $\left(\frac{a}{d'}\right.$ و $\left.\frac{b}{d'}\right) = \frac{d}{d'}$.

۱۱- ثابت کنید: $(ka, kb) = kd \Longrightarrow (a, b) = d$. $(k > ۰)$

۱۲- اگر a وb وc عددهای صحیح باشند ثابت کنید:

$(ab$ و $c) = ۱ \Longrightarrow (a$ و $c) = ۱$ و $(b$ و $c) = ۱$

۱۳- اگر $(a$و$b) = ۱$، ثابت کنید:

الف) برای‌هر $n \in N$ ، $(a^n$ و $b) = ۱$.

ب) برای‌هر mو$n \in N$ ، $(a^n$ و $b^m) = ۱$.

۱۴ـ ثابت کنید :

$$(a \text{ و } b)=۱ \Longleftrightarrow (a \text{ و } a\pm b)=۱$$

۱۵ـ ثابت کنید اگر دو عدد نسبت بهم اول باشند حاصلضرب و مجموع آنها نیز نسبت بهم اولند.

۱۶ـ ثابت کنید اگر a و b نسبت بهم اول باشند حاصلضرب و تفاضل آنها نیز نسبت بهم اولند.

۱۷ـ بزرگترین شمارنده مشترك دو عدد ۷۲ و عدد بزرگتر ۸۶۴ می‌باشد، مطلوبست تعیین عدد کوچکتر. (در $\mathbb{N}$ حساب کنید)

۱۸ـ حاصلضرب دوعدد ۶۴۸ و بزرگترین شمارنده‌مشترکشان ۶ است، آنها چه اعدادی می‌توانند باشند؟ (در $\mathbb{N}$ حساب کنید)

۱۹ـ بزرگترین شمارنده مشترك دوعدد ۱۵ و کوچکترین مضرب مشترك آنها ۹۰ می‌باشد. آنها چه‌اعدادی می‌توانندباشند؟ (در $\mathbb{N}$ حساب کنید)

۲۰ـ مطلوبست تعیین دو عدد که مجموعشان ۲۶ و کوچکترین مضرب مشترکشان، ۱۰۵ باشد.

۲۱ـ ثابت کنید $(a, b)=d \Longleftrightarrow (a^n, b^n)=d^n$.

۲۲ـ ثابت کنید $a^n|b^n \Longrightarrow a|b$.

۲۳ـ ثابت کنید اگر $b\,|\,c$ آنگاه $(a \text{ و } b)=(a+c \text{ و } b)$.

۲۴ـ ثابت کنید دوعدد $۹n+۷$ و $۵n+۴$ بازای جمیع مقادیر n نسبت‌بهم‌اولند.

۲۵ـ ثابت کنید که‌دوعدد $a-۳$ و $a^۲-۴a+۱$ یانسبت بهم اولند یا بزرگترین شمارنده مشترك آنها ۲ است.

۲۶ـ ثابت کنید هرعدد اول‌غیراز ۲ و ۳ مضربی‌از ۶ است بعلاوه یامنهای یك.

۲۷ـ اگر a و b و c دوبدونسبت بهم اول باشند. ثابت کنید.

$$(ab+bc+ac \text{ و } abc)=۱$$

۲۸ـ ثابت کنید :

الف ـ $[a \text{ ، } b]=c \Longleftrightarrow [ma \cdot mb]=mc$

ب ـ $[a, b]=c \Longleftrightarrow [a^n, b^n]=c^n$

همنهشتی

دراین‌قسمت مفهوم همنهشتی، همراه باچندمثال بیان خواهد شد.

مثال ۱ ـ کلاسی ۴۸ شاگرد دارد، روزی معلم تصمیم میگیرد برای جایزه دانش‌آموزان بترتیب دفتر کلاس، به‌نفراول سیب. به‌نفر دوم پرتقال و به‌نفرسوم انار بدهد و عمل توزیع را

بهمین ترتیب تکرار کند. یعنی به‌نفر چهارم سیب، به‌نفر پنجم پرتقال و به‌نفر ششم انار بدهد و...

دراین مثال ملاحظه می‌کنیم که:

الف ـ مجموعه شماره دانش‌آموزانی که سیب به‌آنها میرسد عبارتست از:

$$A_1 = \{1,4,7,10,13,16,19,22,25,28,31,34,37,40,43,46\}$$

ب ـ مجموعه شماره دانش‌آموزانی که پرتقال به‌آنها میرسد عبارتست از:

$$A_2 = \{2,5,8,11,14,17,20,23,26,29,32,35,38,41,44,47\}$$

ج ـ مجموعه شماره دانش‌آموزانی که انار به‌آنها میرسد عبارتست از:

$$A_3 = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45,48\}$$

د ـ $A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_3 = \varnothing$

هـ ـ اگر A مجموعه‌شماره‌های تمام شاگردان این کلاس باشد خواهیم‌داشت.

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

و ـ اگر m و n دوعدد دلخواه متعلق به یکی از مجموعه‌های A_1 ، A_2 یا A_3 باشند، خواهیم داشت: $m-n=3k$ که درآن $k \in Z$.

ممکن است تابحال حدس‌زده باشید که عدد ۳ دراین مثال نقش مهمی دارد.

مثال ۳ ـ یک کلاس ۴۲ نفری برای یک‌اردوی ۴۲روزه بخارج شهر میروند. مربی اردو باموافقت دانش‌آموزان قرارمیگذاردکه به‌ترتیب دفتر کلاس، هرروزیک‌نفرمأمور انتظامات باشد. هرگاه مأموریت نفراول روزشنبه، نفردوم روز یکشنبه، نفر سوم روز دوشنبه و... ونفرهفتم روز جمعه باشد واین‌عمل بهمین ترتیب ادامه پیداکند، به‌پرسشهای زیرپاسخ دهید:

به‌نفرات باشماره‌های ۱۳، ۲۳، ۲۷، ۴۱ چه‌روزی ازهفته نوبت خواهدرسید؟

مجموعه شماره افرادی‌که نوبت‌آنها روزهای شنبه‌است رابا A_1 نشان دهیدوآنرا مشخص نمائید. مجموعه شمارهٔ افرادی‌که نوبت‌آنهاروزهای یکشنبه است را با A_2 نشان دهید و آنرا مشخص نمائید....،

مجموعه شمارهٔ افرادی که نوبت‌آنها روزهای جمعه است را با A_7 نشان دهید و آنرا مشخص نمائید.

آیا مجموعه‌های A_1 و A_2 و... و A_7 عضومشترکی دارند؟

باقیمانده‌های تقسیم هردوعدد دلخواه متعلق به‌یکی ازمجموعه‌های A_1 و A_2 و ... و A_7 برچه عددی باهم برابرند؟

تفاضل هردوعدد دلخواه متعلق به‌یکی از مجموعه‌های A_1 و A_2 و ... و A_7 مضرب چه عددی است؟

چه‌عددی دراین‌مثال نقش‌مهم رابازی میکند؟

دراین دومثال هریك‌ازمجموعه‌های بدست‌آمده رایك دسته همنهشتی وهریك از اعداد ۳ و۷را «پیمانه»، «سنج»یا «میزان» همنهشتی‌مینامند. هردوعدد متعلق به‌یك‌دسته همنهشتی‌دارای این خاصیت است‌که تفاضل آنهامضربی است ازپیمانه، به‌عبارت دیگر، تفاضل‌هردوعدد متعلق به‌یك دسته همنهشتی برعدد پیمانه بخش‌پذیراست.

هردوعدد را که دریك‌دسته همنهشتی باشند نسبت به‌پیمانه همنهشت نامند.

اینك باتوجه به‌مطالب بالا به‌تعریف دقیق همنهشتی می‌پردازیم:

تعریف ــ فرض کنیم m یك‌عدد طبیعی باشد، دوعدد صحیح aوb را، به‌پیمانهm، همنهشت گویند هرگاه $a-b$ مضربm باشد؛ یعنی $a-b$ برm بخش‌پذیر باشد.

همنهشت‌بودن دوعدد a و b به‌پیمانه m رابه‌صورت‌های زیرنمایش میدهند:

$$a \equiv b(m \text{ پیمانه}) \quad \text{و یا} \quad a \overset{m}{\equiv} b$$

و میخوانند a همنهشت با b است به‌پیمانه یا سنج«m»

مثال : $(\text{پیمانه}6) 16 \equiv 34$، زیرا $18 = 16 - 34$ بر۶ بخش‌پذیراست.

$(\text{پیمانه } 6)\ 4 \equiv -8$ ، زیرا $-12 = 4 - (-8)$ بر۶ بخش‌پذیر است.

$(\text{پیمانه } 7)\ 19 \equiv 54$ ، زیرا $35 = 19 - 54$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

ولی

$(\text{پیمانه } 6)\ 5 \not\equiv 8$ ، زیرا $3 = 5 - 8$ بر ۶ بخش‌پذیر نیست.

$(\text{پیمانه } 3)\ 8 \not\equiv 3$ ، زیرا $5 = 8 - 3$ بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

(توجه کنید نقیض $a \equiv b(m \text{ پیمانه})$ را چنین می‌نویسند: $a \not\equiv b(m \text{ پیمانه})$)

همنهشتی‌را میتوان یك‌رابطه درمجموعه اعداد صحیح به‌شکل زیر دانست:

$$\mathbb{R}_m = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Z} \ , \ a \equiv b(m \text{پیمانه})\}$$

حال نشان میدهیم:

قضیه: همنهشتی به‌پیمانه m ، یك‌رابطه هم‌ارزی است.

برهان

۱ـ خاصیت انعکاسی ــ برای هرعدد صحیح a داریم: $a - a = 0 \times m$

پس: $\forall a \in \mathbb{Z}$ ، $a \equiv a(m \text{ پیمانه})$

۲ـ خاصیت تقارنی ــ اگر $a \equiv b(m \text{ پیمانه})$، آنگاه عدد صحیح k یافت می‌شود به گونه‌ایکه $a - b = mk$. از ضرب طرفین این تساوی در (-1) خواهیم داشت:

$b - a = m(-k)$ ، یعنی $m \mid b - a$ درنتیجه : $b \equiv a\ (m \text{ پیمانه})$

۳ـ خاصیت تعدی‌ــ هرگاه a و b و c سه‌عدد صحیح دلخواه باشند بطوریکه :

$a \equiv b(m \text{ پیمانه})$ و $b \equiv c(m \text{ پیمانه})$

آنگاه اعداد صحیح k_1 و k_2 یافت میشوند به گونه‌ایکه:

$$a-b=mk_1 \quad \text{و} \quad b-c=mk_2$$

ازجمع طرفین این دوتساوی نتیجه می‌شود:

$$a-c=m(k_1+k_2)=mk$$

که درآن $k=k_1+k_2$ یکعدد صحیح است. درنتیجه $a\equiv c(m \text{ پیمانه})$

بنابر قضیه فوق، رابطه همنهشتی به‌پیمانه m ، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را بدسته‌های هم‌ارزی افراز می کند.

مجموعهٔ تمام دسته‌های همنهشت به‌پیمانه m را با $\mathbb{Z}/m$ یا $\mathbb{Z}_m$ و مجموعهٔ تمام اعداد صحیح که با a همنهشت به‌پیمانه m هستند را با $[a]$ یا $\bar{a}$ نمایش میدهند.

$[a]$ یکدسته هم‌ارزی و a نماینده این دسته میباشد.

اگر b عضو دیگری از دسته هم‌ارزی $[a]$ باشده داریم $[b]=[a]$ و بطور کلی میتوان ثابت کرد: $[a]=[b] \iff a\equiv b \ (m \text{ پیمانه})$

مثلا درهمنهشتی به‌پیمانه ۶ داریم:

$$[۱۵]=[۳]=[-۳]=\cdots$$

$$[-۵]=[۱]=[۱۳]=\cdots$$

مثال ۱ـ رابطه همنهشتی به‌پیمانه ۳، مجموعه $\mathbb{Z}$ را به‌سه دسته همنهشتی (هم‌ارزی) زیر افراز می کند.

$$\cdots=[-۶]=[-۳]=[۰]=\cdots=\{\cdots,-۶,-۳,۰,۳,۶,\cdots\}$$

$$\cdots=[-۵]=[-۲]=[۱]=\cdots=\{\cdots,-۵,-۲,۱,۴,۷,\cdots\}$$

$$\cdots=[-۴]=[-۱]=[۲]=\cdots=\{\cdots,-۴,-۱,۲,۵,۸,\cdots\}$$

و مجموعهٔ تمام دسته‌های همنهشتی برابر است با $\mathbb{Z}_3=\{[۰],[۱],[۲]\}$.

مثال ۲ـ رابطه همنهشتی به‌پیمانه ۷ مجموعه $\mathbb{Z}$ را به‌دسته‌های همنهشتی‌زیر افرازمیکند:

$$\cdots=[-۷]=[۰]=[۷]=\cdots=\{\cdots,-۱۴,-۷,۰,۷,۱۴,\cdots\}$$

$$\cdots=[-۶]=[۱]=[۸]=\cdots=\{\cdots,-۱۳,-۶,۱,۸,۱۵,\cdots\}$$

$$\cdots=[-۵]=[۲]=[۹]=\cdots=\{\cdots,-۱۲,-۵,۲,۹,۱۶,\cdots\}$$

$$\cdots=[-۴]=[۳]=[۱۰]=\cdots=\{\cdots,-۱۱,-۴,۳,۱۰,۱۷,\cdots\}$$

$$\cdots=[-۳]=[۴]=[۱۱]=\cdots=\{\cdots,-۱۰,-۳,۴,۱۱,۱۸,\cdots\}$$

$$\cdots=[-۲]=[۵]=[۱۲]=\cdots=\{\cdots,-۹,-۲,۵,۱۲,۱۹,\cdots\}$$

$$\cdots=[-۱]=[۶]=[۱۳]=\cdots=\{\cdots,-۸,-۱,۶,۱۳,۲۰,\cdots\}$$

و مجموعهٔ تمام این دسته‌ها عبارتست از: $\mathbb{Z}_7 = \{[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6]\}$

اگرچه دردسته‌های همنهشتی هرعدد از یك‌دسته همنهشتی میتواند نمایندهٔآن دسته انتخاب شود ولی معمولاکـوچکترین عدد صحیح غیرمنفی متعلق به‌هردسته همنهشتی را به‌عنوان نماینده انتخاب میکنند.

توجه: بنا به‌تعریف از $a \equiv b($ پیمانه $m)$ نتیجه میشود $a-b$ مضرب m است. یعنی عدد صحیح k موجود است بطوریکه $a-b=mk$ یا $a=b+mk$. یعنی‌تمام اعداد صحیحی که با b به‌پیمانه m همنهشتند با افزودن مضربی ازm برb بدست می‌آیند. بنابراین:

$$[b]=\{b+mk : k\in\mathbb{Z}\}$$

مثال: مجموعه تمام اعداد صحیح که به‌پیمانه ۷ با عدد ۴ همنهشتند عبارتست از:

$$[4]=\{4+7k : k\in\mathbb{Z}\}=\{\cdots,-10,-3,4,11,18,\cdots\}$$

با توجه به‌آنچه گفته شدگزاره‌های زیر همگی معادلند.

- a به‌پیمانه m باb همنهشت است.
- aوb به‌پیمانه m همنهشت هستند.
- $a\equiv b$ (پیمانه m)
- $[a]=[b]$
- aوb در یك دسته همنهشتی به‌پیمانه‌m قرار دارند.
- $a-b$ مضربی است ازm.
- $m|a-b$

قضیه ـ شرط لازم وکافی برای‌آنکه $a\equiv b(m)$ آنست که باقیمانده‌های تقسیم a و b بر m مساوی باشند.

شرط لازم ـ داریم:

$$a\equiv b \quad (m)$$

$$a=mq_1+r_1 \quad 0\leqslant r_1<m \quad (1)$$

$$b=mq_2+r_2 \quad 0\leqslant r_2<m \quad (2)$$

ثابت می‌کنیم $r_1=r_2$، دو تساوی (۱) و (۲) را ازهم کم می‌کنیم

$$a-b=m(q_1-q_2)+(r_1-r_2)$$

ولی $a\equiv b\ (m)$ پس $a-b=mq$، لذا:

$$mq=m(q_1-q_2)+(r_1-r_2)$$

$$m(q+q_2-q_1)=r_1-r_2$$

چون m طرف چپ را می‌شمرد پس طرف راست می‌شمرد یعنی $m|r_1-r_2$ و حال آنکه طبق

(۱) و (۲) $r_1 - r_2 < m$ و این ممکن نیست مگر آنکه $r_1 - r_2 = 0$ یعنی $r_1 = r_2$.

شرط کافی - داریم:

$$a = mq_1 + r \quad 0 \leqslant r < m \quad (۱)$$
$$b = mq_2 + r \quad 0 \leqslant r < m \quad (۲)$$

می‌خواهیم ثابت کنیم $a \equiv b(m)$، (۱) و (۲) را ازهم کم می کنیم

$$a - b = m(q_1 - q_2)$$

که این خود بمفهوم $a \equiv b(m)$.

همنهشتی و رابطهٔ تساوی

میدانید که رابطه تساوی درمجموعه اعداد دارای خواص زیر است.

۱ـ از $a = b$ نتیجه میشود، برای هر c، $a + c = b + c$ و $ac = bc$

۲ـ از $a + c = b + c$، یا $ac = bc$ $(c \neq 0)$ نتیجه میشود $a = b$

۳ـ از $a = b$ و $c = d$ نتیجه میشود $a + c = b + d$ و $ac = bd$

قضیه‌های زیرنشان میدهند که رابطهٔ همنهشتی نیز دارای خواص مشابهی در $\mathbb{Z}$ است.

قضیهـ الف ـ اگر $a \equiv b$ (پیمانه m)، آنگاه برای هرعدد صحیح c داریم:

$a + c \equiv b + c$ (پیمانه m)

ب ـ اگر $a + c \equiv b + c$ (پیمانه m)، آنگاه $a \equiv b$ (پیمانه m)

ج ـ اگر $a \equiv b$ (پیمانه m) و $c \equiv d$ (پیمانه m) آنگاه

$a + c \equiv b + d$ (پیمانه m) و $ac \equiv bd$ (پیمانه m)

دـ هرگاه $a_1 \equiv b_1$ (پیمانه m) و... $a_n \equiv b_n$ (پیمانه m) آنگاه:

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ (پیمانه m)

$a_1 a_2 \cdots a_n \equiv b_1 b_2 \cdots b_n$ (پیمانه m)

برهان ـ بعهده دانش‌آموزان است.

مثال ۱ـ میدانیم ۷ ≡ ۴ (پیمانه ۳)، بنابراین:

۲+۷ ≡ ۲+۴ (پیمانه ۳) و ۲−۷ ≡ ۲−۴ (پیمانه ۳)

یعنی ۹ ≡ ۶ (پیمانه ۳) و ۵ ≡ ۲ (پیمانه ۳).

مثال ۲ ـ میدانیم ۲۰ ≡ ۸− (پیمانه ۷) و ۱۰ ≡ ۴− (پیمانه ۷)، بنابراین:

۲۰+۱۰ ≡ ۸−۴− (پیمانه ۷) و ۲۰ × ۱۰ ≡ (۴−) × (۸−) (پیمانه ۷)

یعنی ۳۰ ≡ ۱۲− (پیمانه ۷) و ۲۰۰ ≡ ۳۲ (پیمانه ۷)

نتیجه ـ هرگاه $a\equiv b$ (پیمانه m)، آنگاه برای هر $n\geqslant 1$ $a^n\equiv b^n$ (پیمانه m)

برهان ـ با استفاده از (د) قضیه فوق، صحت نتیجه براحتی مشاهده میشود.

پس اگر r باقیمانده تقسیم عدد a برعدد m باشد آنگاه داریم $a\equiv r$ (پیمانه m) چرا؟

و از آنجا $a^n\equiv r^n$ (پیمانه m)

مثال ـ مطلوبست باقیمانده $۲^{۳۰}$ بر ۱۷

حل: از $۱۶=۲^۴$ و $۱۶\equiv -۱$ (پیمانه ۱۷) نتیجه میشود $۲^۴\equiv -۱$ (پیمانه ۱۷) اما

$(۲^۴)^۷\equiv(-۱)^۷$ (پیمانه ۱۷)، یعنی $۲^{۲۸}\equiv -۱$ (پیمانه ۱۷)

از طرف دیگر داریم: $۲^۲\equiv ۴$ (پیمانه ۱۷) ودر نتیجه داریم.

$۲^{۳۰}=۲^{۲۸}\times ۲^۲\equiv(-۱)\times ۴\equiv -۴$ (پیمانه ۱۷)

اما $-۴\equiv ۱۳$ (پیمانه ۱۷)، پس $۲^{۳۰}\equiv ۱۳$ (پیمانه ۱۷)

یعنی باقیمانده $۲^{۳۰}$ بر ۱۷، عدد ۱۳ میباشد.

با استفاده از همنهشتی و خواص آن باقیمانده تقسیم اعداد بزرگ بریك عدد کوچك را براحتی میتوان پیدا نمود.

بعنوان مثال چند نمونه مهم را ذکر میکنیم:

قاعدهٔ پیداکردن باقیمانده تقسیم بر ۳ و ۹

فرض میکنیم، $A=\overline{a_n\cdots a_1a_0}$ که در آن حروف $a_n,\ldots,a_1,a_0$ به‌جای ارقام صفر تا ۹ به کار رفته‌اند، نمایش یك عدد طبیعی در مبنای ۱۰ باشد. میدانیم این‌عدد برابر است با:

$$A=a_n\times ۱۰^n+a_{n-1}\times ۱۰^{n-1}+\cdots+a_1\times ۱۰+a_0$$

چون $۱۰\equiv ۱$ (پیمانه ۹) و $۱۰\equiv ۱$ (پیمانه ۳) پس برای هر $k\in N$،

$۱۰^k\equiv ۱$ (پیمانه ۳) و $۱۰^k\equiv ۱$ (پیمانه ۹)

در نتیجه:

$$A\equiv a_n\times ۱+a_{n-1}\times ۱+\cdots+a_1\times ۱+a_0 \text{ (پیمانه ۹)}$$

یا

$$A\equiv a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0 \text{ (پیمانه ۹)}$$

و بهمین ترتیب

$$A\equiv a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0 \text{ (پیمانه ۳)}$$

پس باقیمانده‌های A و $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$ بر ۹ (یا ۳) برابرند. یعنی بترتیب باقیمانده تقسیم یکعدد طبیعی بر ۹ (یا ۳) برابر است با باقیمانده مجموع ارقام آن عدد بر ۹ (یا ۳).

قاعده پیداکردن باقیمانده تقسیم یکعدد بر ۱۱

فرض می‌کنیم $A=\overline{a_n\cdots a_1a_0}$ نمایش یك عدد طبیعی درمبنای ۱۰ باشد یعنی:

$$A=a_n\times ۱۰^n+a_{n-1}\times ۱۰^{n-1}+\cdots+a_1\times ۱۰+a_0$$

اماچون (پیمانه ۱۱) $-1 \equiv 10$، بنابراین برای هر $k \in N$ ، (پیمانه ۱۱) $10^k \equiv (-1)^k$

یعنی اگر k زوج باشد (پیمانه ۱۱) $10^k \equiv 1$ و اگر k فرد باشد (پیمانه ۱۱) $10^k \equiv -1$

پس:

$$A \equiv a_0 + a_1 \times (-1) + a_2 \times 1 + \cdots + a_n \times (-1)^n \text{ (پیمانه ۱۱)}$$

یا:

$$A \equiv a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + a_n (-1)^n \text{ (پیمانه ۱۱)}$$

یعنی هرگاه مکان ارقام A را از راست به‌چپ به نوبت زوج وفرد بگیریم، آنگاه میتوان گفت: باقیمانده تقسیم یك عدد طبیعی بر ۱۱ برابر است با باقیماندهٔ عددی که از مجموع ارقام مکانهای زوج منهای مجموع ارقام مکانهای فرد آن عدد به‌دست می‌آید.

قاعدهٔ به دست آوردن باقیمانده یك‌عدد بر ۲ ، ۵ و ۱۰

هرگاه، $A = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ يك عدد طبیعی درمبنای ۱۰ باشد، داریم:

$$A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$$
$$= 10 (a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \cdots + a_1) + a_0$$

پس: $A \equiv a_0$ (پیمانه ۵) و $A \equiv a_0$ (پیمانه ۲) و $A \equiv a_0$ (پیمانه ۱۰)

یعنی: باقیمانده تقسیم A بر ۱۰ برابر است بارقم سمت‌راست A وباقیمانده تقسیم A بر ۵ یا ۲ به‌ترتیب برابر است باباقیمانده تقسیم رقم سمت‌راست A بر ۵ یا ۲.

مثال ۱ـ رقم سمت راست عدد 9^9 رابدست آورید.

حلـ طبق آنچه دربالا گفته شد ، رقم سمت راست هرعدد برابراست باباقیماندهٔ تقسیم آن عددبر ۱۰ ، بنابراین بایستی باقیمانده تقسیم 9^9 را بر ۱۰ بدست آورد. چون

$$9 \equiv -1 \text{ (پیمانه ۱۰)} \Rightarrow 9^9 \equiv (-1)^9 \text{ (پیمانه ۱۰)} \Rightarrow 9^9 \equiv -1 \text{ (پیمانه ۱۰)}$$

اما،

$$-1 \equiv 9 \text{ (پیمانه ۱۰)}$$

پس:

$$9^9 \equiv 9 \text{ (پیمانه ۱۰)}$$

یعنی‌عدد 9^9 به رقم ۹ ختم میشود.

مثال ۲ـ ثابت کنید $9^{10} - 1$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

حلـ باتوجه به‌مثال ۱ داریم:

$$9^{10} = 9 \times 9^9 \equiv (-1)(-1) \text{ (پیمانه ۱۰)} \equiv 1 \text{ (پیمانه ۱۰)}$$

یعنی (پیمانه ۱۰) $9^{10} \equiv 1$ و لذا بنابر تعریف همنهشتی عدد صحیحی مانند k وجوددارد بطوریکه $9^{10} - 1 = 10k$ ، یعنی $9^{10} - 1$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

مثال ۳ـ رقم سمت راست عدد $9^{(9)} = 9^{9^9}$ رابدست‌آورید :

حل ـ طبق مثال ۱ داریم:

$$۹^۹ \equiv ۹ \pmod{۱۰}$$

ولذا طبق تعریف همنهشتی عددصحیحی مانند k یافت میشودبه گونه‌ایکه $۹^۹ - ۹ = ۱۰k$ ویا $۹^۹ = ۱۰k + ۹$. بنابراین:

$$۹^{۹^۹} = ۹^{(۹^۹)} = ۹^{۱۰k+۹} = ۹^{۱۰k} \times ۹^۹ = (۹^{۱۰})^k \times ۹^۹$$

درنتیجه:

$$۹^{۹^۹} = ۹^{(۹^۹)} \equiv ۱^k \times ۹ \pmod{۱۰} \Longrightarrow ۹^{(۹^۹)} \equiv ۹ \pmod{۱۰}$$

یعنی عدد $۹^{(۹^۹)} = ۹^{۹^۹}$ به ۹ ختم میشود.

تقسیم طرفین یک رابطه همنهشتی برعدد طبیعی c

هر گاه $a \equiv b \pmod{m}$، آنگاه برای هرعددصحیح c، $ac \equiv bc \pmod{m}$.

اماعکس این مطلب همواره صحیح نیست، بطورمثال:

$$۳۳ \equiv ۲۱ \pmod{۶}$$

ولی

$$\frac{۳۳}{۳} \not\equiv \frac{۲۱}{۳} \pmod{۶}$$

اما قضیه زیر دراین مورد روشن‌کننده است:

قضیهـ دررابطه همنهشتی $ac \equiv bc \pmod{m}$ داریم:

$$a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

که درآن $d = (m, c)$.

برهان ـ ازفرض نتیجه‌میشود که عدد صحیح k یافت میشود به گونه‌ایکه:

$$ac - bc = mk$$

یا

$$(a-b)c = mk$$

اگر طرفین این تساوی را بر $d = (m, c)$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$(a-b)\frac{c}{d} = \frac{m}{d}k$$

یعنی عدد صحیح $\frac{m}{d}$، عدد $(a-b)\frac{c}{d}$ را می‌شمرد. اما میدانیم $\left(\frac{m}{d}, \frac{c}{d}\right) = ۱$

پس $\frac{m}{d} \mid a-b$

یعنی $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$.

مثال – از (پیمانه ۶) ۲ ≡ ۸ نتیجه می‌شود (پیمانه ۳) ۱ ≡ ۴.

قضیه – هیچ دو عضوی از مجموعهٔ $X=\{0, 1, 2, 3, \ldots, m-1\}$، به پیمانه m در Z همنهشت نیستند. (m یکعدد طبیعی است)

برهان – طبق‌فرض، اگر $b\in X$ و a و $a>b$، آنگاه $0\leqslant a<m$ و $0\leqslant b<m$ در نتیجه $0<a-b<m$ چرا؟، بنابراین $a-b$ مضرب m نیست. یعنی برای هر $k\in Z$، $a-b\neq mk$ و یا $a\not\equiv b$ (سنج m).

نتیجه ۱ – طبق قضیهٔ فوق، درهمنهشتی به‌پیمانه m در Z، دسته‌های:

[۰]، [۱]، [۲]، ...، [m − ۱] دوبه‌دو متمایزند. یعنی حداقل m دسته همنهشتی داریم.

نتیجه ۲ – هرعدد صحیح a تنها با یکی از اعضاء مجموعهٔ $x=\{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$ همنهشت است: زیرا طبق قضیه تقسیم داریم:

$$a=mq+r \Longleftrightarrow a\equiv r \ (\text{پیمانه } m) \qquad r<m$$

بنابراین تعداد دسته‌های همنهشتی به‌پیمانه m درست برابر m است.

همانطورکه دیدید، ما مجموعهٔ این‌دسته‌ها را به Z_m نمایش می‌دهیم:

$$Z_m=\Big\{[0], [1], \ldots, [m-1]\Big\}$$

وعضوهای این مجموعه‌را درحالت‌کلی به [a]، [b]، ...، [x]، [y] نشان می‌دهیم.

دسته کامل مانده‌ها – تعریف – مجموعه‌ای از عددهای درست:

$$X=\{x_1, x_2, \ldots x_m\} \qquad m\in N$$

را یك دسته‌ی کامل مانده‌ها درهمنهشتی به‌پیمانه m می‌نامیم، درصورتیکه هریك از عضوهای X یك عضو از یك دسته‌ی همنهشتی به پیمانه m باشد. بعبارت دیگر، اگر ما از هر دسته همنهشتی به پیمانه m یك نماینده انتخاب کنیم مجموعه متشکل از این نماینده‌ها یك دسته‌ی کامل مانده‌ها در همنهشتی به پیمانه m است.

مثال – طبق آنچه قبلاً دیدید، مجموعهٔ:

$$C=\{0,1,2,\ldots m-1\}$$

یك دسته‌ی کامل مانده‌ها درهمنهشتی به‌پیمانه m است.

روشن است‌که اگر m را به‌هریك از اعضای C بیفزائیم، مجموعه‌ی حاصل، یعنی:

$$\{m, m+1, \ldots, 2m-1\}$$

نیز یك‌دسته‌ی کامل مانده‌ها دراین همنهشتی است.

مثلاً برای $m=5$، هریك ازمجموعه‌های:

$$\{0,1,2,3,4\} \text{ و } \{5,6,7,8,9\} \text{ و } \{-5,-4,-3,-2,-1\}$$

یك دسته‌ی کامل مانده‌ها درهمنهشتی به‌پیمانه ۵ است.

در حالت کلی، قضیه زیر درمورد دستهٔ کامل مانده‌ها وجود دارد.

قضیه – فرض‌کنیم $m \in N$ ، شرط لازم‌وکافی برای آنکه مجموعه‌ی ،

$$A = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$$

از عددهای درست ، یك دسته‌ی‌کامل مانده‌ها درهمنهشتی به‌پیمانه m باشد آنست‌که هیچ دوعضو آن به‌پیمانه m همنهشت نباشند. (بعنوان تمرین این قضیه را اثبات‌کنید)

قضیه – فرض‌کنیم $m \in N$ و a،b دوعدددرست‌و a نسبت‌به m اول‌باشند اگر $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ یك دسته‌ی کامل مانده‌ها به‌پیمانه m باشد ، آنگاه مجموعه زیر ،

$$C_1 = \{ac_1 + b ، ac_2 + b ، \ldots ac_m + b\}$$

یك دسته‌ی‌کامل مانده‌ها دراین همنهشتی است.

برهان – بنابر قضیه بالا ، کافی است نشان دهیم ، هیچ دو عضو این مجموعه‌ها به‌پیمانهٔ m باهم همنهشت نیستند.

فرض کنیم دو عضو $ac_i + b$ و $ac_j + b$ ، $i \neq j$ ، به‌پیمانه m همنهشت باشند ؛ چنین داریم :

$$ac_i + b \equiv ac_j + b (\text{پیمانه } m) \Longrightarrow ac_i \equiv ac_j (\text{پیمانه } m)$$

بنا به قضیه خوانده شده، چون $(a, m) = ۱$; $\Longrightarrow c_i \equiv c_j$

اما این‌متناقض است بافرض اینکه C یك‌دسته‌ی کامل مانده‌ها است.

مثال – اگر ۵ = m ، ۸ = a و ۳ – = b ، چون {۰،۱،۲،۳،۴} یك دسته‌ی کامل مانده‌ها است. آنگاه مجموعه :

$$\{۸ \times ۰ - ۳ ، ۸ \times ۱ - ۳ ، ۸ \times ۲ - ۳ ، ۸ \times ۳ - ۳ ، ۸ \times ۴ - ۳\}$$
$$= \{-۳ ، ۵ ، ۱۳ ، ۲۱ ، ۲۹\}$$

نیز یك دسته‌ی کامل مانده‌ها درهمنهشتی به‌پیمانه ۵ است.

حالت خاص : اگر ۰ = b باشد در اینصورت $C_2 = \{ac_1 ، ac_2 ، ac_3 ، \ldots ac_m\}$ یك دسته‌ی کامل مانده‌ها به پیمانه m است.

مثال– اگر ۴ = m و ۵ = a باشد آنگاه {۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳} یك دسته کامل مانده‌ها و {۰ ، ۵ ، ۱۰ ، ۱۵} نیز یك‌دسته‌ی‌کامل مانده‌ها درهمنهشتی به‌پیمانه ۴ است :

قضیه فرما – اگر دو عدد a و p نسبت بهم اول باشند (p عددی است اول و $p \nmid a$) آنگاه،

$$a^{p-1} \equiv ۱ \qquad (\text{پیمانهٔ } p)$$

برهان – می‌دانیم $X = \{۰، ۱، ۲، \ldots p - ۱\}$ یك‌دسته‌ی کامل مانده‌ها در همنهشتی به

پیمانه p است بنابراین مجموعهٔ :

$$Y = \{۰، a، ۲a ، ...، (p-۱)a\}$$

نیز، بنا برقضیه بالا، یک‌دسته‌ی کامل ماندمها در این همنهشتی است. بنابراین هر عضو X با یك عضو Y به پیمانه p همنهشت است و بالعکس . چون ۰ در هر دو مجموعه است ، نتیجه می‌شود که هریك ازعددهای ۱، ۲، ...، $p-۱$ درست بایکی ازعددهای

$$a ، ۲a ، ...، (p-۱)a$$

همنهشت است وبالعکس. درنتیجه بنابه‌قضیه‌ی خوانده شده داریم:

$$۱ \times ۲ \times ... \times (p-۱) \equiv (۱ \times a) \times (۲ \times a) \times ... \times ((p-۱)a) \quad (\text{پیمانه } p)$$

و یا

$$۱ \times ۲ \times ... \times (p-۱) \equiv a^{p-۱} \times (۱ \times ۲ \times ... \times (p-۱)) \quad (\text{پیمانه } p)$$

چون p و $۱ \times ۲ \times ... \times (p-۱)$ نسبت به‌هم اولند داریم:

$$a^{p-۱} \equiv ۱ \quad (\text{پیمانه } p)$$

نتیجه - برای هرعدد درست a و هرعدد اول p ، $a^p \equiv a$ (پیمانه p)

حل معادله در $\mathbb{Z}_m$

سؤال دیگری که دربحث همنهشتی مطرح میشود این است که‌آیا میتوان معادله زیر را در $\mathbb{Z}_m$ حل کرد:

$$ax \equiv b \quad (\text{پیمانه } m) \quad (۱)$$

به‌عبارت دیگر، آیا میتوان عدد صحیح $x_۰$ را به‌گونه‌ای یافت که:

$$ax_۰ \equiv b \quad (\text{پیمانه } m) \quad (۲)$$

اگر $x_۰$ وجود داشته باشد که دررابطه (۲) صدق کند،آنگاه می‌گوئیم معادله همنهشتی(۱) دارای جواب است.

چند مثال

۱ـ معادله همنهشتی $۴x \equiv ۵$ (پیمانه ۷) جواب دارد، زیرا مثلا $x = ۳$ دراین رابطه همنهشتی صدق میکند.

۲ـ معادله همنهشتی $۲x \equiv ۱$ (پیمانه ۶) جواب ندارد: زیرا اگر فرض کنیم $x_۰$ یک‌جواب آن باشد، آنگاه $۶ \mid ۲x_۰ - ۱$ ، اما $۲x_۰ - ۱$ عددی است فرد، درصورتیکه مضربهای ۶ همه زوج هستند. بنابراین نمی‌توان عدد $x_۰$ را پیدا کرد که درمعادله همنهشتی فوق صدق کند.

مثالهای فوق نشان میدهند که معادله همنهشتی $ax \equiv b$ (پیمانه m) ، ممکن‌است جواب

داشته یا نداشته باشد. اما همانطورکه گفته شد این معادله موقعی جواب داردکه x_0 یافت شود به گونه‌ایکه: $ax_0 \equiv b(\text{پیمانه } m)$

یا $m \mid ax_0 - b$ ویا اعداد صحیح x_0 و k_0 موجود باشند بطوریکه:

$$ax_0 - b = mk_0$$

یا $ax_0 + m(-k_0) = b$ یعنی معادله $ax + my = b$

دارای جوابهای صحیح باشد، و بالعکس اگر این معادله جواب داشته‌باشد معادله همنهشتی فوق هم دارای جواب خواهد بود.

قضیهـ شرط لازم و کافی برای آنکه معادله خطی $ax + by = c$ در مجموعه $\mathbb{Z}$ جواب داشته باشد آنست که بزرگترین شمارنده مشترک a و b، عدد c را بشمرد.

برهانـ شرط لازم: اگر $ax + by = c$ دارای جواب باشد، یعنی x_0 و $y_0 \in \mathbb{Z}$ وجود دارند بطوریکه $ax_0 + by_0 = c$. اما چون $d \mid a$ و $d \mid b$ درنتیجه $d \mid ax_0 + by_0$ یعنی $d \mid c$.

شرط کافی: اگر $d = (a \text{ و } b)$ و $d \mid c$ آنگاه عدد صحیح k یافت میشود، به گونه‌ایکه $c = dk$ و چون d بزرگترین شمارنده مشترک a و b میباشد پس $d = am + bn$ که در آن m و $n \in \mathbb{Z}$.

بنابراین:

$$c = dk = a(mk) + b(nk)$$

یعنی اعداد صحیح $x_0 = mk$ و $y_0 = nk$ در معادله $ax + by = c$ صدق میکنند، یعنی $ax + by = c$ دارای جواب میباشد.

قضیهـ اگر $d = (a \text{ و } b)$ و x_0 و y_0 جوابی برای معادله خطی $ax + by = c$ باشد، جواب کلی آن بصورت $x = x_0 + k\frac{b}{d}$ و $y = y_0 - k\frac{a}{d}$ می‌باشد که در آن $k \in \mathbb{Z}$.

برهانـ توجه کنید که $d \mid a$ و $d \mid b$، درنتیجه $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ اعداد صحیح هستند و براحتی میتوان دید که $x_0 + k\frac{b}{d}$ و $y_0 - k\frac{a}{d}$ درمعادله $ax + by = c$ صدق می‌کنند.

اما اگر x_1 و y_1 جواب دیگری برای $ax + by = c$ باشد، آنگاه داریم:

$$ax_1 + by_1 - c = ax_0 + by_0$$
$$\Longrightarrow a(x_1 - x_0) = -b(y_1 - y_0)$$

یا

$$\frac{a}{d}(x_1 - x_0) = \frac{-b}{d}(y_1 - y_0)$$

$$\Longrightarrow \frac{b}{d} \Big| \frac{a}{d}(x_1 - x_0)$$

ولی $1 = \left(\frac{a}{d} \text{ و } \frac{b}{d}\right)$ ، در نتیجه $\frac{b}{d} \Big| (x_1 - x_0)$.

پس $x_1 = x_0 + k\frac{b}{d}$ و همچنین $y_1 = y_0 - k\frac{a}{d}$ که در آن $k \in Z$.

چون x_1 و y_1 دلخواه بود، بنابراین جواب کلی بهمین صورت می‌باشد.

مثال– معادله $7x + 5y = 10$ را حل کنید.

حل– چون $1 = (7 \text{ و } 5) \mid 10$ ، پس معادله جواب دارد.

اما روش پیدا کردن جواب:

$$7x + 5y = 10 \Longrightarrow 5y = 10 - 7x \Longrightarrow y = \frac{10 - 7x}{5} = 2 - x - \frac{2x}{5}$$

پس $\frac{x}{5} = k \in Z$

در نتیجه:

$$x = 5k \text{ و } y = \frac{10 - 7(5k)}{5} = 2 - 7k$$

بنابرآنچه درقسمت اول حل معادله در $\mathbb{Z}_m$ بیان شد، میتوان ثابت کرد:

قضیه– معادله همنهشتی $ax \equiv b$ (پیمانه m) دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a \text{ و } m) \mid b$.

برهان– اثبات بعهدهٔ دانش‌آموزان است.

مثال ۱ – معادله همنهشتی $7x \equiv 10$ (پیمانه ۵) را حل کنید.

حل– $7x \equiv 10$ (پیمانه ۵) جواب دارد اگر و تنها اگر $7x + 5y = 10$ جواب داشته باشد که حل آن درمثال فوق آمده است و $x = 5k$ جواب معادله همنهشتی فوق است.

مثال ۲ – معادله همنهشتی $73x \equiv 1$ (پیمانه ۲۳) را حل کنید.

معادله جواب دارد زیرا $1 \mid (23 \text{ و } 73)$ بنابراین آن را حل می کنیم.

$$73x - 1 = 23k$$

و یا:

$$(1)\ 73x - 23k = 1$$

با استفاده از الگوریتم اقلیدسی یك جواب معادله (۱) بدست می‌آوریم و سپس آن را حل می کنیم.

$$(I) \quad 73 = 23 \times 3 + 4$$

$$(II) \quad 23 = 4 \times 5 + 3$$

$$(III) \quad 4 = 3 \times 1 + 1$$

از تساوی (III) نتیجه میشود $4 - 3 \times 1 = 1$ بجای ۳ مقدارش را از تساوی (II) قرار میدهیم:

$$4 - (23 - 4 \times 5) \times 1 = 1 \quad \text{و یا} \quad 4 \times 6 - 23 \times 1 = 1$$

دراینجا بجای ۴ مقدارش را از تساوی (I) قرار میدهیم :

$$(۷۳ - ۲۳ \times ۳) \times ۶ - ۲۳ \times ۱ = ۱$$

و یا :

$$۷۳ \times ۶ - ۲۳ \times ۱۹ = ۱$$

بنابراین $x = ۶$ و $k = ۱۹$ یك جواب معادلهٔ (۱) است و بکمك این جواب و استفاده از قضیه قبل جوابهای معادله بدست می‌آید و $x = ۲۳n + ۶$ و $n \in \mathbb{Z}$ است.

تمرین

۱ــ هرگاه a یکعدد صحیح باشد نشان دهید که $a^۲$ عضوی از دستهٔ همنهشتی [۰] یا [۱] با پیمانه ۲ یا ۳ است.

۲ــ ثابت‌کنید برای هر دوعدد صحیح a و b داریم:

الف ــ $(a \pm b)^۲ \equiv a^۲ + b^۲$ (پیمانه ab)

ب ــ $(a + b)^۳ \equiv a^۳ + b^۳$ (پیمانه ab)

۳ــ ثابت کنید $۶۴۱ | ۲^{۳۲} + ۱$ (از راه همنهشتی)

۴ــ باقیمانده تقسیم $۲۰^{۵۱۵}$ بر ۷ و $۴۱^{۷۵}$ بر ۳ و $۳^{۲۰۰}$ بر ۱۰۱ را بدست‌آورید.

۵ــ ثابت کنید $۲۲۳ | ۲^{۳۷} - ۱$ (از راه همنهشتی)

۶ــ ثابت کنید عدد $۹^۹$ ازسمت راست به ۸۹ ختم می‌شود.

۷ــ ثابت کنید اگر $a \equiv b$ (پیمانه m) و $n|m$ آنگاه $a \equiv b$ (پیمانه n).

۸ــ اگر $a \equiv b$ (پیمانه m) و $a \equiv b$ (پیمانه n) و $(m, n) = ۱$، آنگاه $a \equiv b \ (mn)$.
و ازآنجا نتیجه بگیرید $۶|n$ اگر وفقط اگر $۲|n$ و $۳|n$.

۹ــ آیا گزاره زیر درست است؟

$$a^n \equiv b^n \ (\text{پیمانه } m) \Longrightarrow a \equiv \pm b \ (\text{پیمانه } m)$$

۱۰ــ ثابت کنید اگر $a \equiv b$ (پیمانه m) آنگاه $(a, m) = (b, m)$

۱۱ــ تحقیق کنید (از راه همنهشتی) کــه $۲۷ | ۱۰۰۰ - ۱$ و $۳۷ | ۱۰۰۰ - ۱$ و از آنجا قانونی برای بخش‌پذیری بر ۲۷ و ۳۷ ذکر کنید.

۱۲ــ با استفاده از (پیمانه ۱۳) $۱۰ \equiv -۳$ و (پیمانه ۱۳) $۱۰^n \equiv (-۳)^n$ و (پیمانه ۷) $۱۰ \equiv ۳$ و (پیمانه ۷) $۱۰^n \equiv ۳^n$ قانون بخش‌پذیری بر ۷ و ۱۳ را به دست آورید.

۱۳ــ نشان‌دهید که باقیمانده تقسیم‌عدد ۵۶۷۹۵۴ بر ۷ برابراست با باقیمانده ۵۶۷−۹۵۴ آیا می‌توان قانونی برای بخش‌پذیری بر ۷ دراین زمینه بیان کرد؟

۱۴ـ کدامیك ازمجموعه‌های زیر یك دستهٔ کامل مانده، به‌پیمانه ۱۱ است.

الف ـ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$

ب ـ $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

۱۵ـ آیا مجموعه $\{2^n \mid 0 \leqslant n \leqslant 16\}$ یك دسته کامل مانده‌ها به پیمانه ۱۷ است؟

۱۶ـ آیا مجموعه $\{3^n \mid 0 \leqslant n \leqslant 6\}$ یك دسته کامل مانده‌ها به‌پیمانه ۷ است؟

۱۷ـ اگر باقیمانده تقسیم عددهـای ۶۸ و ۱۴۵ بر m دو عدد مساوی باشند $(m \neq 1)$ m و r را تعیین کنید.

۱۸ـ ثابت کنید:

الف ـ باقیمانده هرعدد بر ۴ (یا ۲۵)، بترتیب عبارتست از باقیمانده عدد حاصل از دو رقم سمت راست آن بر ۴ (یا ۲۵).

ب ـ باقیمانده هر عدد بر ۸ (یا ۱۲۵)، بترتیب عبارتست از باقیمانده عدد حاصل از سه رقم سمت راست آن بر ۸ (یا ۱۲۵).

۱۹ـ باقیمانده 2^{512} رابر ۵ پیدا کنید.

۲۰ـ باقیمانده‌های تقسیم اعداد $2^{6n} - 3^{6n}$ را بر ۳۵ و $2^{3n-1} \times 7^n + 3^{3n-2}$ را بر ۲۹ بدست آورید.

۲۱ـ ثابت کنید $2^{4n} - 1$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

۲۲ـ ثابت کنید $2^{120} - 1$ بر ۲۱ بخش‌پذیر است.

۲۳ـ اگر $A = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ یك عدد طبیعی باشد، نشان دهید شرط لازم و کافی برای آن که A بر ۱۲ بخش‌پذیر باشد آن است که $a_0 - 2a_1 + 4(a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$ بر ۱۲ بخش‌پذیر باشد.

۲۴ـ نشان دهید کـه بـاقیماندهٔ تقسیم عدد ۲۵۳۹۶ بـر ۱۱ برابر است با باقیمانده حاصل جمع $96 + 53 + 2$ بر ۱۱.

۲۵ـ نشان دهید که عدد $2^{38} + 17$ بر ۲۱ بخش‌پذیر است.

۲۶ـ رقمهای سمت راست اعداد 3^{424} و 7^{131} را بدست آورید.

۲۷ـ باقیماندهٔ تقسیم عدد 4^{2691} را بر ۷ بدست آورید.

۲۸ـ معادلات زیر را در $\mathbb{Z}$ حل کنید:

الف ـ $x + y = 1$ ب ـ $6x + 8y = 7$

ج ـ $57x - 87y = 342$ د ـ $24x + 138y = 18$

۲۹ـ معادلات همنهشتی زیر را حل کنید:

الف ـ $5x \equiv 3$ (پیمانه ۸) ب ـ $7x \equiv 1$ (پیمانه ۴)

ج - $۴x \equiv ۲$ (پیمانه۶)　　　　د - $۲x \equiv ۳$(پیمانه ۷)

ه - $۲x + ۱ \equiv ۴(x-۱)$ (پیمانه ۸)

۳۰- ثابت کنید $n^{۷} \equiv n$ (پیمانه ۷) و از آنجا نتیجه بگیرید $۲^{۷} + ۳^{۷} + ۴^{۷} + ۵^{۷}$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

۳۱- ثابت کنید $n^{۱۲} \equiv ۱$ (پیمانه ۱۳) هرگاه $(n, ۱۳) = ۱$

۳۲- ثابت کنید $n^{۱۶} - m^{۱۶}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است. هرگاه $(n, ۱۷) = ۱$ و $(m, ۱۷) = ۱$

۳۳- اعداد صحیحی مانند x و y پیدا کنید به طوری که

$$(۳۵۷ , ۶۲۹) = ۳۵۷x + ۶۲۹y$$

۳۴- دو عدد مثبت را چنان تعیین کنید که یکی مضرب ۷ و دیگری مضرب ۱۳ بوده و مجموع آنها ۷۴ باشد.

۳۵- ثابت کنید

$$n(n+۱)(۲n+۱)(۳n^{۲} - ۳n + ۱) \equiv ۰ \quad (\text{پیمانه } ۳۰)$$

۳۶- آیا $f(n) = n^{۲} - n + ۴۱$ برای هرعدد طبیعی n یکعدد اول می‌دهد؟

۳۷- آیا $g(n) = n^{۲} - ۷۹n + ۱۶۰۱$ برای هرعدد طبیعی n یکعدد اول می‌دهد؟

۳۸- هرگاه $M_n = ۲^{n} - ۱$ (عدد مرسن) اول باشد ثابت کنید n اول است.

۳۹- هرگاه $F_n = ۲^{n} + ۱$ (عدد فرما) اول باشد آنگاه n توانی از ۲ است.

۴۰- ثابت کنید　$(۶n + ۱۰ , ۴n + ۷) = ۱$

۴۱- رقم یکان عدد $۷^{۴k+۲} + ۱۷^{۸k+۴}$ را پیدا کنید.

۴۲- ثابت کنید　$۶ | a(a^{۲} + ۱۱)$

فصل چهارم

ماتریسها

بطوری‌که می‌دانید ، آرایشی از اعداد حقیقی به‌صورت :

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots \ \vdots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

را یک ماتریس می‌نامند . اعداد $a_{۱۱}$ ، $a_{۲۲}$ ، ... ، a_{mn} را درایه‌های یا عضوهای ماتریس A می‌خوانند ، درحالت‌کلی ، یك درایه از A را به‌صورت a_{ij} نشان می‌دهیم که i نمایندهٔ سطر و j نمایندهٔ ستونی است‌که این عضو درمحل‌تلاقی آنها واقع می‌باشد . مثلا ، $a_{۱۱}$ درایه‌ای است‌که در تلاقـی سطر اول وستون اول یا $a_{۲۳}$ درایه‌ای درتلاقـی سطر دوم و ستون سوم و ... a_{mn} درایه‌ای درتلاقی سطر mام و ستون nام است .

ماتریس A که‌دارای m سطرو n ستون‌است یك‌ماتریس $m \times n$ (بخوانید‌ماتریس m در n) یا یك‌ماتریس مرتبه $m \times n$ نامیده میشود و برای سادگی‌آنرا به‌صورت زیرنمایش می‌دهند :

$A=[a_{ij}]\ m\times n$

درمواردی‌که مرتبه ماتریس A معلوم باشد مختصراً می‌نویسیم : $A=[a_{ij}]$ هرگاه در این ماتریس داشته باشیم $m=n$ ، آنگاه A را یك ماتریس مربعی مرتبهٔ n مـی‌نامند در یك ماتریس مربعی مرتبهٔ n ، عضوهای $a_{۱۱}$ ، $a_{۲۲}$ ، $a_{۳۳}$ ، ... ، a_{nn} را اعضای قطراصلـی ماتریس می‌نامند .

. می‌توان دیدکه بین‌مجموعهٔ ماتریس‌های مربعی مرتبه ۱ ومجموعهٔ اعداد حقیقی یك‌تناظر یك‌به‌یك وجود دارد . لذا به‌جای هرماتریس مربعی مرتبه ۱ می‌توان عدد حقیقی‌که درایه‌آن ماتریس است قرار داد . بنابراین $a_{۱۱}=[a_{۱۱}]$. به‌طورکلی ، هربردار nتایی‌را هم می‌توان بصورت یك ماتریس $۱ \times n$ درنظر گرفت.

تساوی دوماتریس

دوماتریس $A=[a_{ij}]m\times n$ و $B=[b_{ij}]m\times n$ رامساوی می‌نامندومی‌نویسند $A=B$ ،

هرگاه برای هر i و j داشته باشیم ، $a_{ij}=b_{ij}$. یعنی :

$$(A=B)\Longleftrightarrow(\forall_{i,j}\ ،a_{ij}=b_{ij})$$

بعبارت دیگر ، دوماتریس A و B را مساوی گوئیم ، هرگاه درایه‌های متناظر آنها مساوی باشند.

جمع ماتریسها وخواص مربوط به‌آن

برای هردوماتریس مرتبهٔ $m\times n$ ، $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ ، ماتریس $C=[c_{ij}]$ را ، که درآن $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ، حاصل‌جمع ماتریس A با ماتریس B می‌نامند و آن را به‌صورت $C=A+B$ نشان می‌دهند . بعبارت دیگر داریم :

$$(C=A+B)\Longleftrightarrow(\forall_{i,j}\ ،c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}) \qquad (۱)$$

مثال :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ ۲ & ۱ \\ -۳ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۵ & ۲+۰ \\ -۲+۲ & -۱+۱ \\ ۳-۳ & ۰+۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

باید توجه داشت‌که ، دوماتریس A و B را وقتی می‌توان باهم جمع‌کرد که هم مرتبه باشند . دراینصورت ، اصطلاحاً گوئیم A و B جمع‌پذیرند . همچنین روشن است‌که درتعریف(۱) ماتریس C از مرتبهٔ $m\times n$ است. یعنی ، هرگاه مجموعهٔ ماتریسهای $m\times n$ را با $M_{m\times n}$ نمایش دهیم داریم $C\in M_{m\times n}$ ، بنابراین مجموعهٔ $M_{m\times n}$ نسبت‌به‌عمل $+$ بسته‌است . علاوه براین عمل $+$ درمجموعهٔ $M_{m\times n}$ دارای ویژگیهای زیر است :

الف ـ $\forall A,B\in M_{m\times n}$ و $A+B=B+A$

ب ـ $\forall A,B,C\in M_{m\times n}$ و $A+(B+C)=(A+B)+C$

ج ـ $\forall A,B,C\in M_{m\times n}$ و $(A+C=B+C)\Longleftrightarrow(A=B)$

اثبات ـ اگر $A=[a_{ij}]$ ، $B=[b_{ij}]$ و $C=[c_{ij}]$ ماتریسهای $m\times n$ باشند خواهیم داشت :

الف ـ

$$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]$$

تعریف جمع دوماتریس .

$$=[a_{ij}+b_{ij}]$$

خاصیت جابجائی جمع اعداد حقیقی :

$$=[b_{ij}+a_{ij}]$$

تعریف جمع دوماتریس :

$$=[b_{ij}]+[a_{ij}]$$

$$A+B=B+A$$

ب -
$$A+(B+C)=[a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}])$$

تعریف جمع دوماتریس : $=[a_{ij}]+[(b_{ij}+c_{ij})]$

تعریف جمع دوماتریس : $=[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]$

شرکت‌پذیری جمع دراعداد حقیقی : $=[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]$

تعریف جمع دوماتریس : $=[(a_{ij}+b_{ij})]+[c_{ij}]$

تعریف جمع دوماتریس : $=([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}]$

$$=(A+B)+C$$

ج -
$$(A+C)=(B+C)\Leftrightarrow[(a_{ij}+c_{ij})]=[(b_{ij}+c_{ij})]$$

قانون حذف درجمع اعداد حقیقی : $\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}\quad \forall i,j$

$$\Leftrightarrow A=B$$

درمجموعه‌ی $M_{m\times n}$ ، ماتریسی‌راکه تمام عضوهای‌آن صفر است **ماتریس‌صفر** می‌نامیم وآن را با $O_{m\times n}$ یا $\bar{o}$ نمایش می‌دهیم . روشن است‌که برای هر ماتریس $A\in M_{m\times n}$ ، داریم :

$$A+\bar{o}=A$$

بنابراین $\bar{o}$ ، عضو بی‌اثر عمل جمع درمجموعهٔ $M_{m\times n}$ است .

وارون ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نسبت به‌عمل $+$ ، ماتریس $A_1=[-a_{ij}]_{m\times n}$ است زیرا داریم :

$$A+A_1=[a_{ij}]+[-a_{ij}]$$
$$=[a_{ij}+(-a_{ij})]$$
$$=[0]$$
$$=\bar{o}$$

ماتریس A_1 را به $-A$ نشان می‌دهیم وآن‌را وارون جمعی یاقرینه ماتریس A می‌نامیم. روشن است‌که هرماتریس $A\in M_{m\times n}$ ، دارای یك قرینه است.

برای هردوماتریس هم مرتبه A و B ، ماتریس $A+(-B)$ را به $A-B$ نشان داده آن را تفاضل دو ماتریس A ، B می‌نامیم .

نتیجه ـ مجموعهٔ ماتریسهای $M_{m\times n}$ باعمل $+$ یك‌گروه آبلی‌است.

ضرب یکعدد دریك ماتریس (ضرب اسکالر)

برای هرماتریس $A\in M_{m\times n}$ و $r\in R$ ، ماتریس مرتبه $m\times n$ ، $[ra_{ij}]$ راحاصلضرب عدد r در A خوانده آنرا به rA نشان می‌دهیم یعنی:

$$rA=[ra_{ij}]$$

بعبارت دیگر : rA ازضرب هردرایه A درعدد حقیقی r به دست می‌آید .

اگر A و B دوماتریس هم‌مرتبه و r و s اعداد حقیقی باشند ، بسادگی میتوان نشان داد که :

الف ـ $r(A+B)=rA+rB$

ب ـ $(r+s)A=rA+sA$

ج ـ $r(sA)=(rs)A$

د ـ $1A=A$

همهٔ اینها به‌سادگی ثابت می‌شوند ، برای نمونه یکی ازآنها را ثابت می‌کنیم :

اثبات ب ـ $(r+s)A=(r+s)[a_{ij}]$

تعریف ضرب اسکالر : $=[(r+s)a_{ij}]$

خاصیت پخش اعداد حقیقی $=[ra_{ij}+sa_{ij}]$

تعریف جمع ماتریسها $=[ra_{ij}]+[sa_{ij}]$

تعریف ضرب اسکالر : $=r[a_{ij}]+s[a_{ij}]$

$(r+s)A=rA+sA$

نماد Σ (سیگما)

معمولا ، برای سادگی مجموع اعداد حقیقی

(۱) a_1 و a_2 و a_3 و .... و a_n

را با استفاده از نماد Σ بصورت :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$ (a_i جمله عمومی نامیده می‌شود)

نشان می‌دهند . حرف i متغیری است که دامنه تغییرات‌آن مجموعه ، $\{1,2,3,\ldots n\}$ است.
تساوی $i=1$ در زیر نماد Σ بدین معناست که اولین مقدار i عدد ۱ است و عدد n در بالای Σ یعنی‌آخرین مقدار i عدد n می‌باشد . بعبارت دیگر ، نماد $\sum_{i=1}^{n}$ نشان دهندهٔ این است که i اعداد درست از ۱ تا n را اختیار می‌کند . بنابراین :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

چند مثال :

۱ـ $$\sum_{i=1}^{6} a_i = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$$

۲ـ برای هرعدد طبیعی n ،

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$$

۳ـ برای هرعدد طبیعی n ،

$$\sum_{k=1}^{n} k =1+2+3+4+\dots+n$$

یعنی مجموع اعداد طبیعی ازیك تا n ،

$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

۴ـ برای هرعدد طبیعی n ،

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 =1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

۵ـ درتعریف میانگین n اندازهٔ آماری داشتیم :

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$$

$$=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

ویژگیهای Σ

۱ـ برای هرعدد ثابت k داریم :

$$\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$$

زیرا می‌توان نوشت :

تعریف Σ :

$$\sum_{i=1}^{n} ka_i=ka_1+ka_2+\dots+ka_n$$

خاصیت پخشی اعداد حقیقی:

$$=k(a_1+a_2+\dots+a_n)$$

تعریف Σ :

$$=k\sum_{i=1}^{n} a_i$$

مثلاً $\sum_{i=1}^{n} k = nk$ ، زیرا کافی است در ویژگی (۱) ؛ a_i را مساوی ۱ قرار دهیم .

۲- داریم :

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

زیرا :

تعریف Σ : $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n)$

شرکت‌پذیری وجابجائی + در $\mathbf{R}$:

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

تعریف Σ :

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

ویژگی (۲) قابل تعمیم می‌باشد. یعنی :

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + \dots + x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i + \dots + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

۳- داریم :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

زیرا :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im})$$

تعمیم ویژگی (۲)

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} + \sum_{i=1}^{n} a_{i2} + \dots + \sum_{i=1}^{n} a_{im}$$

تعریف Σ :

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

تمرین

۱- هریك از عبارات زیر را با استفاده از نماد Σ بنویسید .

$۱ + ۳ + ۵ + \dots + (۲n - ۱)$

$(۱ \times ۲) + (۲ \times ۳) + \dots + n(n + ۱)$

$۲t + ۴t^{۲} + ۸t^{۳} + ۱۶t^{۴} + ۳۲t^{۵} + ۶۴t^{۶}$

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)+\cdots+(x_p+y_p)+y_{p+1}$$

$$(x_1-m)(y_1-n)+(x_2-m)(y_2-n)+\cdots+(x_p-m)(y_p-n)$$

۲ــ مجموع‌های زیررا بسط دهید.

الف ـ $\sum_{k=-5}^{5} k(k-1)$ ب ـ $\sum_{k=0}^{5} k(k-1)$ ج ـ $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$

۳ــ هرگاه داشته باشیم $\sum_{x=1}^{n}(2x-1)=n^2$ ؛ بااستفاده ازخواص Σ مقدار $\sum_{1}^{n} 2x$ را حساب کنید. $(\sum_{1}^{n} a=na)$

۴ــ ثابت کنید : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$

۵ــ با استفاده ازخواص Σ ثابت کنید : $\sum_{i=1}^{n}[a+(i-1)d]=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$

(می دانیم که $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$)

۶ ــ نشان دهید : $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}a_{ij}$

۷ــ نشان دهید : $\sum_{k=1}^{2}a_{ik}\left(\sum_{h=1}^{3}b_{kh}c_{hj}\right)=\sum_{h=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{2}a_{ik}b_{kh}\right)c_{hj}$

مجموع درایه‌های یك ماتریس

باتوجه به‌ویژگیهای Σ ، مجموع درایه‌های ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ را می‌توان‌به‌یکی ازصورتهای زیر محاسبه کرد :

الف : مجموعه درایه‌های هرسطر را محاسبه کرده ، سپس مجموع ایـن مجموع‌ها را حساب کنیم :

$$a_{11}+a_{12}+\dots+a_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}$$

$$a_{21}+a_{22}+\dots+a_{2n}=\sum_{j=1}^{n}a_{2j}$$

....

....

$$a_{m1}+a_{m2}+\dots+a_{mn}=\sum_{j=1}^{n}a_{mj}$$

اکنون طرفین این تساویها را عضو به‌عضو جمع مـی‌کنیم ، امـا مجموع طرف چپ ، مجموع درایه‌های ماتریس A است پس :

$$\text{مجموع درایه‌های } A=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}+\sum_{j=1}^{n}a_{2j}+\dots+\sum_{j=1}^{n}a_{mj}$$

ویژگی ۲ از Σ :

$$= \sum_{j=1}^{n} (a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{mj})$$

اما مجموع داخل پرانتز، مجموع درایه‌های ستون j ام A است وخود طبق آنچه دیدیم

برابر است با $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$

بنابراین داریم :

$$\text{(۱)} \qquad \text{مجموع درایه‌های } A = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

ب : مجموع درایه‌های هرستون را حساب کرده سپس مجموع این مجموع‌هارا حساب کنیم:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ + & + & \cdots & + \\ \hline \sum_{i=1}^{m} a_{i1} & \sum_{i=1}^{m} a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} a_{in} \end{array}$$

پس :

$$\text{مجموع درایه‌های } A = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_{in}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}) \qquad \text{ویژگی ۲ از } \Sigma$$

مجموع داخل پرانتز، مجموع درایه‌های سطر i ام است که خود برابر $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ ، است

لذا داریم :

$$\text{(۲)} \qquad \text{مجموع درایه‌های } A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

با توجه به‌تساوی‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ را یك مجموع دو گانه می‌نامیم . در مجموعهای دو گانه ترتیب گذاشتن اندیسهای Σ بی‌اثر است و این خود یکی دیگر از ویژگیهای Σ است که قبلا دیدیم.

ضرب ماتریسها

اگر $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ دوماتریس باشند ، می‌توان ماتریس جدید:

$$C=[c_{ij}]_{m\times n}$$

را چنین تعریف کرد :

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1k}b_{k1}+\dots+a_{1p}b_{p1}=\sum_{k=1}^{p}a_{1k}b_{k1}$$

$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+\dots+a_{1k}b_{k2}+\dots+a_{1p}b_{p2}=\sum_{k=1}^{p}a_{1k}b_{k2}$$

....

....

$$c_{1j}=a_{11}b_{1j}+a_{12}b_{2j}+a_{13}b_{3j}+\dots+a_{1k}b_{kj}+\dots+a_{1p}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{1k}b_{kj}$$

....

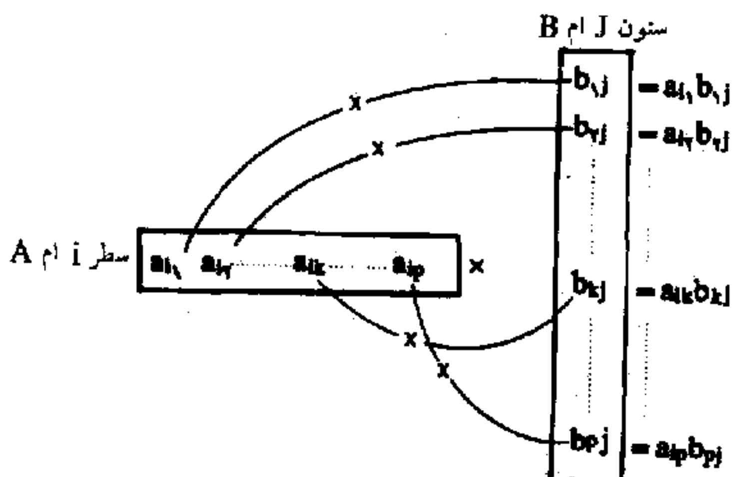
....

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\dots+a_{ik}b_{kj}+\dots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

یعنی :

$$\boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}}$$

ماتریس C را حاصلضرب ماتریس A درماتریس B می‌نامیم و آن رابه $A\times B$ یا AB نشان می‌دهیم ، درایه c_{ij} ازماتریس حاصلضرب مطابق نمودار زیر به‌دست می‌آید :



هرگاه $i=۱$ ، و $j=۱$ ، سطر اول ماتریس A را در ستون اول ماتریس B ، نظیر به‌نظیر ضرب کرده باهم جمع می‌کنیم تا درایه سطر اول و ستون اول حاصلضرب به‌دست آید.

به‌طور کلی برای یافتن درایه حاصلضرب سطر i ام در ستون j ام درایه‌های سطر i ام ماتریس A را نظیر به‌نظیر در درایه‌های ستون j ام ماتریس B ضرب کرده اعداد حاصل را باهم جمع می‌کنیم.

مثال :

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲\times ۰ + ۰\times -۱ + (-۱)\times ۰ & ۲\times -۱ + ۰\times ۰ + (-۱)\times ۰ \\ ۰\times ۰ + ۳\times -۱ + ۱\times ۰ & ۰\times -۱ + ۳\times ۰ + ۱\times ۰ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ -۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

تعریف ـ هرگاه A یک ماتریس مربعی باشد آنگاه $A^۱ = A$ و $A^n = A \cdot A^{n-۱}$ ، $(n \in N)$.

ماتریس همانی (واحد)

ماتریس مربعی :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \hdashline ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$$

که درایه‌های قطر اصلی آن ۱ و سایر درایه‌های آن صفر است ماتریس همانی می‌نامیم و آن‌را به I_n یا I نشان می‌دهیم. روشن است که اگر A یک ماتریس مربعی مرتبهٔ n باشد داریم :

$$A \times I_n = I_n \times A = A \qquad (۱)$$

بعبارت‌دیگر ، I_n عضو بی‌اثر عمل‌ضرب درمجموعهٔ ماتریسهای مربعی‌مرتبه n (مجموعهٔ $M_{n\times n}$) است.

برای هرماتریس $A = [a_{ij}]_{n\times r}$ چنین داریم :

$$I_{n\times n} \times A_{n\times r} = A_{n\times r} \qquad (۲)$$

$$A_{n\times r} \times I_{r\times r} = A_{n\times r} \qquad (۳)$$

دراینجا $I_{n\times n}$ را ماتریس همانی چپ A و $I_{r\times r}$ را ماتریس همانی‌راست A می‌نامند.

مثال :

$$(۱)\quad \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۰ \end{bmatrix},$$

$$(۲)\quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

توجه

الف- مثال زیر نشان می‌دهد ، که عمل‌ضرب ماتریسها دارای خاصیت جابجائی نیست:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & +۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}.$$

ب- همچنین مثال زیر نمایان‌می‌سازد که‌ممکن‌است‌حاصلضرب‌دوماتریس، ماتریس‌صفر شود بدون‌آنکه‌هیچکدام ازآنها ماتریس صفر باشد .

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ & ۹ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ج- مثال زیرنشان می‌دهد که دستور حذف درضرب ماتریسها برقرار نیست .

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۰ \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۲ & -۷ \end{bmatrix}\quad (۱)$$

$$AC=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۲ & -۷ \end{bmatrix}\quad (۲)$$

بامقایسه (۱) و (۲) دیده می‌شود که $AB=AC$ ولی می‌بینیم که $B\neq C$.

ویژگی‌های عمل ضرب

۱ـ ضرب ماتریسها شرکت‌پذیر است :

اگر فرض کنیم $A=[a_{ik}]_{m\times n}$ و $B=[b_{kl}]_{n\times p}$ و $C=[c_{lj}]_{p\times r}$، آنگاه بنابه تعریف ضرب ماتریسها خواهیم داشت :
$$(AB)C=\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right]_{m\times p}\left[c_{lj}\right]_{p\times r}$$

و اگر فرض کنیم $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}=d_{il}$ آنگاه می‌توان نوشت :

$$(AB)C=\left[d_{il}\right]_{m\times p}\left[c_{lj}\right]_{p\times r}=\left[\sum_{l=1}^{p} d_{il}c_{lj}\right]_{m\times r}=\left[\sum_{l=1}^{p} c_{lj}d_{il}\right]_{m\times r}$$

بجای d_{il} مساویش را قرار میدهیم :
$$(AB)C=\left[\sum_{l=1}^{p} c_{lj}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right]$$

و چون c_{lj} به k بستگی ندارد بنابر خاصیت Σ می‌توانیم بنویسیم :

$$(AB)C=\left[\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} c_{lj}(a_{ik}b_{kl})\right]$$

و چون Σ ها دارای خاصیت جابجائی هستند می‌توان نوشت :

$$(AB)C=\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} c_{lj}(a_{ik}b_{kl})\right]=\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}(a_{ik}b_{kl})c_{lj}\right]$$

و یا :
$$(AB)C=\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} a_{ik}(b_{kl}c_{lj})\right]$$

و چون a_{ik} به l بستگی ندارد خواهیم داشت :

$$(AB)C=\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}\right]=\left[a_{ik}\right]\left[\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}\right]$$

و یا :
$$(AB)C=A(BC)$$

یعنی ضرب ماتریسها شرکت پذیر است .

۲ـ ضرب ماتریسها نسبت به جمع دارای خاصیت بخشش است. یعنی هرگاه $A=[a_{ik}]_{m\times n}$، $B=[b_{kj}]_{n\times p}$ و $C=[c_{kj}]_{n\times p}$، آنگاه داریم :
$$A(B+C)=AB+AC$$

برای اثبات درستی تساوی بالا ، $(B+C)$ را در حکم یک ماتریس فرض کرده ، آنگاه تعریف ضرب دوماتریس را برای A و $(B+C)$ بکار می‌بریم :

$$A(B+C)=[a_{ik}]_{m\times n}\times([b_{kj}]_{n\times p}+[c_{kj}]_{n\times p})$$

تعریف جمع ماتریسها :
$$=[a_{ik}]_{m\times n}\times[(b_{kj}+c_{kj})]_{n\times p}$$

تعریف ضرب ماتریسها : $=\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})\right]_{m\times p}$

ویژگی ۲ نماد Σ : $=\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right]_{m\times p}$

جمع ماتریسها : $=\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]_{m\times p}+\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right]_{m\times p}$

تعریف ضرب ماتریسها : $=AB+AC$

همچنین هرگاه جمع و ضرب ماتریسهای D ، E و F را دراعمال بکار برده شده شدنی فرض بگیریم داریم : $(D+E)F=DF+EF$

چند نوع ماتریس خاص

۱- ماتریس ترانهاده (جابجا شده)

تعریف - هرگاه درماتریس $A=[a_{ij}]$ ، جای سطرها و ستونها را عوض کنیم ماتریس دیگری به‌دست می‌آید که آن را ترانهاده A می‌نامیم ترانهاده ماتریس A را به A' نشان می‌دهیم .

$A'=[a'_{ij}] \quad a'_{ij}=a_{ji}$

مثال :

۱- ماتریس ترانهاده $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ عبارتست :

$$A'=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}$$

۲- ماتریس ترانهاده $C=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ عبارتست از :

$$C'=\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

عمل ترانهاده کردن درماتریسها ، تابعی به‌صورت : $T: M_{m\times n}\rightarrow M_{n\times m}$

$$A \rightarrow A'$$

تعریف می‌کند که آن‌را تابع ترانهاده می‌نامند .

۲ـ **ماتریس قطری** ـ ماتریس مربعی :

$$D=\begin{bmatrix} d_{۱۱} & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & d_{۲۲} & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & d_{۳۳} & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & d_{۴۴} & \cdots & ۰ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

را که در آن درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی همگی صفر باشند ، ماتریس قطری می‌نامند. به عبارت دیگر ، $D=[d_{ij}]_{n\times n}$ یك ماتریس قطری است اگر و فقط اگر

$$d_{ij}=۰ \qquad \forall i\neq j$$

مثال ۱ـ $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ ، یك ماتریس قطری است .

مثال ۲ـ $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ ، یك ماتریس قطری است .

هرگاه درماتریس قطری، تمام درایه‌های قطر اصلی مساوی باشند، ماتریس را اسکالر می‌خوانند.

$$S=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & a & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & a \cdots & ۰ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \end{bmatrix}$$

روشن است که داریم $S=aI_n$.

۳ـ ماتریسهای بالامثلثی و پائین مثلثی

ماتریس مربعی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

که درآن درایه‌های واقع درزیر قطر اصلی‌همگی صفرند را ماتریس بالامثلثی می‌نامند. بعبارت دیگر $A=[a_{ij}]$ یك ماتریس بالامثلثی است هرگاه برای هر $j<i$ داشته باشیم $a_{ij}=0$.

بطریق مشابه ماتریس مربعی $B=[b_{ij}]$ یك ماتریس پائین مثلثی‌است هـرگاه درایه‌های واقع دربالای قطر اصلی‌آن همگی صفرباشند یعنی برای هر $i<j$ داشته باشیم $b_{ij}=0$.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

چندمثال :

الف ـ ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0/5 \\ 0 & 0 & 0/3 \end{bmatrix}$ ، یك ماتریس بالا مثلثی است .

ب ـ ماتریس $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ؛ یك ماتریس پائین مثلثی است .

ج ـ I_n بالامثلثی وپائین مثلثی است (چرا؟)

د ـ ماتریس $\overline{O}$ ، هم‌بالامثلثی وهم پائین مثلثی است (چرا ؟)

۴ـ ماتریس متقارن ـ ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ را متقارن خوانیم هرگاه داشته باشیم :

$$\forall i,j \ ; \ a_{ij}=a_{ji}$$

یعنی درایه‌ای که درسطر i ام وستون j ام واقع است برابر درایه‌ای است که درسطر j ام و ستون i ام قرار گرفته است.

واضح است که A ماتریس متقارن است اگر و تنها اگر $A=A'$. چرا؟

مثال ۱ـ ماتریس:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

متقارن است زیرا داریم $a_{۱۲}=a_{۲۱}$ ، $a_{۱۳}=a_{۳۱}$ ، ...

$$A'=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

۵ - ماتریس پاد متقارن (ضدمتقارن) ـ ماتریس مربع $A=[a_{ij}]$ را پاد متقارن خوانند هرگاه داشته باشیم:

$$\forall i, j \text{ و } a_{ij}=-a_{ji}$$

یا

$$A=-A'$$

از این‌تعریف بلافاصله نتیجه می‌شود که درایه‌های قطراصلی این ماتریس تماماً صفراست. زیرا، هیچ عددی غیرازصفر باقرینه‌اش برابر نیست. در زیر دوماتریس پادمتقارن نوشته شده است.

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۳ \\ -۲ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}.$$

واضح‌است که $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ماتریس پادمتقارن است اگر و تنها اگر $A'=-A$ چرا؟

ویژگیهای عمل ترانهاده کردن درماتریسها

الف ـ $(A')'=A$

ب ـ $(A+B)'=A'+B'$

ج ـ $\lambda\in R$ ، $(\lambda A)'=\lambda A'$

د ـ $(AB)'=B'A'$

اثبات (الف) تا (ج) ساده است. ویژگی «د» را ثابت می‌کنیم:

هرگاه $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ، $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ آنگاه $A'=[a'_{ij}]$ و $B'=[b'_{ij}]$ که در آن:

$$a'_{ij}=a_{ji} \text{ و } b'_{ij}=b_{ji}$$

در نتیجه : $B'A'=[d_{ij}]$ که در آن :

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{n} b'_{ik}a'_{kj}=\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} \qquad (1)$$

اما $(AB)'=[c'_{ij}]$ که درآن $c'_{ij}=c_{ji}$ و بنابه‌تعریف c_{ji} داریم :

$$c_{ji}=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\ b_{ki} \qquad (2)$$

با مقایسهٔ (۱) و (۲) وتعریف تساوی دوماتریس درستی تساوی قضیه ثابت می‌شود .

مثال ـ هرگاه $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ و $\lambda=3$ ، آنگاه درستی ویژگیهای الف ، ج و د را تحقیق کنید .

الف ـ

$$A'=\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} \text{ و } (A')'=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

ج ـ

$$3A=\begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \end{bmatrix}$$

$$(3A)'=\begin{bmatrix} 3a & 3d \\ 3b & 3e \\ 3c & 3f \end{bmatrix}$$

$$3A'=\begin{bmatrix} 3a & 3d \\ 3b & 3e \\ 3c & 3f \end{bmatrix}$$

د ـ داریم :

$$A'=\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} \text{ و } B'=\begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ap+br+ct & aq+bs+cu \\ dp+er+ft & dq+es+fu \end{bmatrix}$$

$$(AB)'=\begin{bmatrix} ap+br+ct & dp+er+ft \\ aq+bs+cu & dq+es+fu \end{bmatrix}$$

$$B'A'=\begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ap+br+ct & dp+er+ft \\ aq+bs+cu & dq+es+fu \end{bmatrix}$$

با مقایسه دوتساوی اخیر نتیجه می‌شود :

$$(AB)'=B'A'$$

تمرین

درمسائل این بخش ازحروف بزرگ الفباء برای نمایش ماتریسها استفاده شده و اعمال بکار رفته امکان‌پذیر می‌باشند .

۱ـ ثابت‌کنید : $(A+B)-C=A+(B-C)$

۲ـ ضربهای زیررا انجام دهید

الف ـ
$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

ب ـ
$$\begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & d_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & d_۳ \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} d_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & d_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & d_۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ \\ b_۱ & b_۲ \\ c_۱ & c_۲ \end{bmatrix}$$

آیا می‌توان قانون‌کلی درضرب یك ماتریس در ماتریس قطری بیان‌کرد؟

ج ـ
$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

۳ـ هرگاه

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \text{ ، } B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \text{ ، } C=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

نشان دهیدکه :

$$(AB)C=A(BC)$$

۴ـ ثابت‌کنید هرگاه r و s اعداد حقیقی باشند داریم :

الف ـ $rA=\overline{O} \Longrightarrow r=۰$ یا $A=\overline{O}$

ب ـ $rA=rB \Longrightarrow A=B \quad (r\neq ۰)$

ج ـ $rA \cdot sB=rs(AB)$

د ـ $(-A)(-B)=AB$

هـ ـ $A(rB)=(rA)B=r(AB)$

۵ـ تحت چه شرایطی $ABCD$ (حاصلضرب ۴ ماتریس) قابل تعریف است.

۶ـ مستقیماً ثابت کنید :

$$(D+E)F=DF+EF$$

۷ـ هرگاه $A=\begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}$ ، مطلوبست محاسبهٔ A^2 ، A^3 ، A^4 ، ... ، A^n

۸ـ درماتریسهای زیر ، a ، b ، c و d درچه شرایطی باید صدق کند تا ضرب دوماتریس جابجائی باشد .

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

۹ـ هرگاه $A=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آیا تساوی $AB=BA$ برقرار است ؟

۱۰ ـ هرگاه $AB=BA$ ، ثابت کنید که :

$$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$$

$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$$

۱۱ـ هرگاه A یک ماتریس مربع مرتبه n باشد ثابت کنید :

الف ـ $A^2-I^2=(A+I)(A-I)=(A-I)(A+I)$

ب ـ $A^3+I^3=(A+I)(A^2-A+I)$

۱۲ـ برای چه مقادیری از x تساوی زیر درست است .

$$[x \quad 4 \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}=\overline{0}$$

۱۳ـ هرگاه $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ثابت کنید :

$$A^n=\begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{bmatrix}$$ (n عدد طبیعی است)

۱۴ـ هرگاه n عددی طبیعی باشد، باروش استقراء ثابت کنید .

$$AB=BA \Longrightarrow AB^n=B^nA$$

۱۵ـ هرگاه B و C ماتریسهای مربع مرتبه n بوده و داشته باشیم $A=B+C$ ، $C^2=\bar{0}$ و $BC=CB$ با روش استقراء ثابت کنید :

$A^{k+1}=B^k(B+(k+1)C)$ (k عدد طبیعی است)

۱۶ـ هرگاه $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ، ثابت کنید که

الف ـ $A^2=3A-2I$

ب ـ بااستفاده از استقراء ، $A^n=(2^n-1)A-2(2^{n-1}-1)I$

۱۷ـ در تساوی زیر A را حساب کنید .

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

۱۸ـ هرگاه $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ ، ماتریسهای A^{100} و A^{201} را حساب کنید .

۱۹ـ اگر $A^2=2\alpha A-\alpha^2 I$ ثابت کنید

$$A^n=n\alpha^{n-1}A-(n-1)\alpha^n I$$

۲۰ـ هرگاه $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ ، مطلوبست: الف ـ محاسبهٔ AA' ، ب ـ $(AA')'=AA'$

۲۱ـ نشان دهید که :

الف ـ ضرب ماتریسهای قطری هم مرتبه دارای خاصیت جابجائی است .

ب ـ فرمول کلی برای D^p که درآن D یك ماتریس قطری و P یك عدد طبیعی است بدست آورید .

۲۲ـ اگر A یك ماتریس مربعی باشد ثابت کنید $A+A'$ و AA' متقارن و $A-A'$ پادمتقارن است.

۲۳ـ با توجه به مسألهٔ ۲۲ آیا هرماتریس را می‌توان به‌صورت حاصل‌جمع یك ماتریس متقارن و یك ماتریس پاد متقارن نوشت ؟ به چه شکل ؟

دترمینان

در کلاس دوم بههر ماتریس مربع مرتبه ۲ ،

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

عــدد حقیقی $ad-bc$ را نسبت داده وآن را دترمینان ماتریس A نامیدیم و به این صورت نمایش دادیم :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \qquad (۱)$$

هروقت تساوی (۱) را می‌نویسیم ، اصطلاحاً گفته می‌شود $|A|$ را بسط داده‌ایم .

اینك با استفاده از دترمینان ماتریسهای مربع مرتبهٔ ۲ ، دترمینان ماتریسهای مربع مرتبه ۳ را چنین تعریف می‌کنیم :

تعریف - برای هرماتریس :

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

دترمینان A را با $|A|$ نشان داده وبصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \qquad (۲)$$

هریك از دترمینانهای طرف چپ تساوی (۲) بهاین‌ترتیب به‌دست‌می‌آیند‌که در دترمینان اصلی سطر و ستونی که شامل ضریب آن دترمینان است حذف می‌شود :

$$|A| = a\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

سطر وستون هرماتریس مربعی A را اصطلاحاً سطر وستونهای $|A|$ ومرتبه A رامرتبه $|A|$ می‌نامند ، درتساوی (۲) ، می‌گوئیم $|A|$ را برحسب درایه‌های سطراول یا به‌طورساده برحسب سطراول بسط داده‌ایم. اینك نشان می‌دهیم که می‌توان $|A|$ را برحسب سطر دوم یا سوم نیزبسط داد. برای این منظور دترمینانهای مرتبه دو از تساوی (۲) را بسط داده، عبارات بدست‌آمده را دسته‌بندی می‌کنیم به‌قسمی که بتوان از درایه‌های سطردوم یاسوم فاکتور گرفت .

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \qquad (۳)$$

$$=a(ei-hf)-b(di-fg)+c(dh-eg)$$

$$=aei-afh-bdi+bfg+cdh-ceg$$

$$=-bdi+cdh+aei-ceg-afh+bfg$$

$$=-d(bi-ch)+e(ai-cg)-f(ah-bg)$$

بنابراین :

تعریف دترمینان ۲ × ۲ :
$$=-d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}+e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}-f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

پس :

$$|A|=-d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}+e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}-f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

واین بسط $|A|$ برحسب درایه‌های سطر دوم دترمینان است (چرا ؟) . به‌همین ترتیب با استفاده از تساویهای(۳) فوق ودسته‌بندی مجدد آنهابسط $|A|$ برحسب درایه‌های سطرسوم به‌دست می‌آید.

$$|A|=g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}-h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}+i\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

با همین روش بسادگی ثابت می‌شود که می‌توان $|A|$ را برحسب درایه‌های هریك از ستونهایش بسط داد :

برحسب ستون اول :
$$|A|=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}+g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

برحسب ستون دوم :

$$|A|=-b\begin{vmatrix}d & f\\ g & i\end{vmatrix}+e\begin{vmatrix}a & c\\ g & i\end{vmatrix}-h\begin{vmatrix}a & c\\ d & f\end{vmatrix}$$

برحسب ستون سوم :

$$|A|=c\begin{vmatrix}d & e\\ g & h\end{vmatrix}-f\begin{vmatrix}a & b\\ g & h\end{vmatrix}+i\begin{vmatrix}a & b\\ d & e\end{vmatrix}$$

علامت ضرایب دترمینانهای مرتبه ۲ دربسط یك دترمینان مرتبه ۳

در هریك از بسطهای بالا، علامت هرضریب دترمینان ۲ × ۲ برابر است با:

$$(-۱)^{i+j}$$

که درآن **i** نماینده سطر و **j** نماینده ستونی است که آن ضریب (درایه) در محل تلاقی آنها قرار دارد و این مطلب در بسط دترمینانهای از مرتبه بالاتر نیز درست است.

مثال :

۱−

$$\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{vmatrix}=۱\times۴-۲\times۳=-۲$$

۲− برحسب سطراول :

$$\begin{vmatrix}۵ & ۲ & ۳\\ ۲ & ۱ & ۴\\ -۲ & -۳ & -۱\end{vmatrix}=(-۱)^{۱+۱}\times۵\begin{vmatrix}۱ & ۴\\ -۳ & -۱\end{vmatrix}+(-۱)^{۱+۲}\times۲\begin{vmatrix}۲ & ۴\\ -۲ & -۱\end{vmatrix}$$

$$+(-۱)^{۱+۳}\times۳\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ -۲ & -۳\end{vmatrix}$$

$$=۵(-۱+۱۲)-۲(-۲+۸)+۳(-۶+۲)$$

$$=۵۵-۱۲-۱۲=۳۱$$

۳− برحسب سطر سوم :

$$\begin{vmatrix}۵ & ۲ & ۳\\ ۲ & ۱ & ۴\\ -۲ & -۳ & -۱\end{vmatrix}=(-۱)^{۳+۱}(-۲)\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۴\end{vmatrix}+(-۱)^{۳+۲}(-۳)\begin{vmatrix}۵ & ۳\\ ۲ & ۴\end{vmatrix}$$

$$+(-۱)^{۳+۳}(-۱)\begin{vmatrix}۵ & ۲\\ ۲ & ۱\end{vmatrix}$$

$$= -2(8-3)+3(20-6)-1(5-4)$$
$$= -10+42-1=31$$

۴ ـ برحسب ستون سوم :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\times 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\times 4\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(-1)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=3(-6+2)-4(-15+4)-1(5-4)$$
$$=-12+44-1=31$$

دترمینان ماتریس مرتبه ۱ را مساوی درایه آن تعریف می‌کنند یعنی دترمینان $[a_{11}]$ مساوی a_{11} است .

دستور ساروس برای بسط دترمینانهای ۳×۳

داشتیم که :

$$|B|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

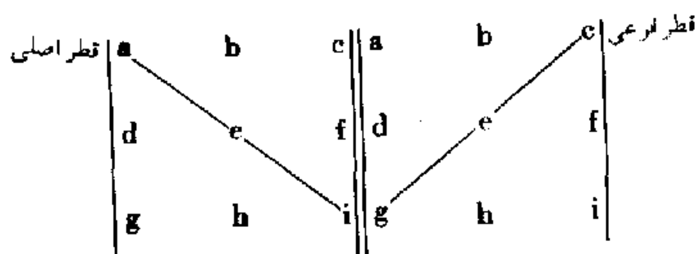
$$|B|=a(ei-hf)-b(di-fg)+c(dh-eg)$$
$$=aei-afh-bdi+bfg+cdh-ceg$$

که می‌توان طرف راست این تساوی را به‌صورت زیردسته‌بندی کرد :

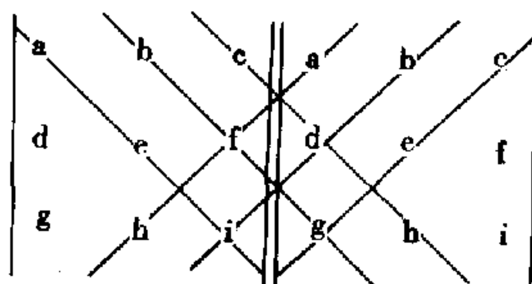
$$|B|=(aei+bfg+cdh)-(ceg+bdi+afh) \qquad (1)$$

برای بخاطرسپردن تساوی (۱) ازدستورزیرکه به‌دستور ساروس معروف بوده وفقط برای دترمینانهای ۳×۳ بکار میرود استفاده می کنیم:

دترمینان B را بصورت زیر کنار خودش قرار میدهیم .



سپس قطر اصلی دترمینان سمت‌چپ و قطر فرعی دترمینان سمت راست و همچنین دوخط مـوازی هریك ازاین دوقطر به‌قسمی که روی هرخط سه درایه دترمینان قرار گیرد ، مطابق شکل زیر ، رسم می‌کنیم .



اکنون برای به‌دست‌آوردن تساوی (۱) یعنی بسط $|B|$ به‌ترتیب زیرعمل می‌کنیم :

الف ـ حاصلضرب عددهای واقع برقطر اصلی و همچنین‌حاصلضرب عددهای واقع بر هر یك ازخطوط موازی قطر اصلی را به‌طورجداگانه به‌دست آورده باهم جمع می‌کنیم ، کـه در اینصورت عبارت ، $cdh+bfg+aei$ حاصل می‌شود .

بـ حاصلضرب عددهای واقع برقطرفرعی وهمچنین حاصلضرب عددهای واقع برهریك ازخطوط موازی قطرفرعی را به‌طورجداگانه به‌دست‌آورده باهم‌جمع می‌کنیم ، که دراینصورت عبارت $afh+bdi+ceg$ حاصل‌می‌شود .

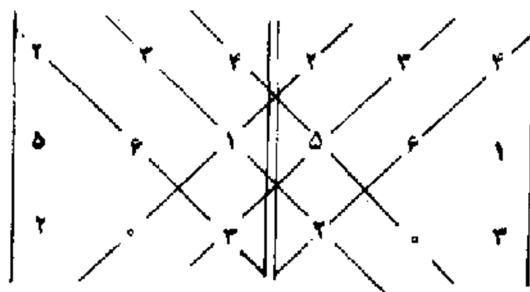
جـ حاصل ب را از الف کم می‌کنیم:

$$|B|=(aei+bfg+cdh)-(ceg+bdi+afh)$$

و این همان تساوی (۱) است .

مثال

ـ۱



$$=(۲\times۶\times۳+۳\times۱\times۲+۴\times۵\times۰)-(۴\times۶\times۲+۳\times۵\times۳+۲\times۱\times۰)$$
$$=(۳۶+۶+۰)-(۴۸+۴۵+۰)$$
$$=۴۲-۹۳=-۵۱$$

همچنین می‌توان دو دترمینان را زیر هم نوشته و عیناً مثل وقتی که آنها را کنار هم قرار دادیم محاسبه کنیم.

۲-

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=(0\times3\times7+-2\times6\times7+5\times0\times4)$$
$$-(7\times3\times5+7\times0\times-2+4\times6\times0)$$
$$=(0-84+0)-(105+0+0)=-189$$

درمورد دترمینان مثال ۲ ، دیده می‌شود که اگرآنرا برحسب سطراول بسط دهیم زودتر به‌جواب خواهیم رسید.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$=0+0+7(-12-15)=7\times-27=-189$$

یعنی اگر درایه‌هائی از یک‌سطریاستون دترمینانی صفر باشد ، محاسبه آن دترمینان ساده‌ترانجام می‌گیرد به‌همین‌دلیل درمحاسبهٔ دترمینانها سعی میشود بعضی ازدرایه‌های یک‌سطریایک ستون را به‌صفرتبدیل نموده سپس دترمینان‌را برحسب آنسطر یاستون بسط دهند . برای این‌منظوراز ویژگیهائی استفاده می‌شود که بعداً خواهید دید.

دترمینان مرتبه ۴

دترمینان یک ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{4\times4}$ را نیز ، نظیر آنچه برای دترمینان ۳×۳ گفته شد و با استفاده از دترمینانهای مرتبه ۳ آن ، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix}$$
$$-d\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

علامت ضریب a_{ij} دراین بسط با استفاده از دستور $(-1)^{i+j}$ به‌دست می‌آید.

همچنین دترمینان یک‌ماتریس مرتبهٔ ۴ رامی‌توان برحسب هریک ازسطرها یاستونهای آن بسط داد .

مثال ۱ـ بسط برحسب سطر اول :

$$|B|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix}$$

$$-0\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$|B|=-1\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix}+0+0$$

اکنون دترمینانهای مرتبه ۳ را برحسب ستونهای اول آنها بسط می‌دهیم :

$$|B|=(-1)(-1)\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{vmatrix}+(-2)(1)\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=1(3-0)-2(4+1)=3-10=-7$$

به‌همین ترتیب دترمینان ماتریسهای مربعی مرتبه‌های بالاترنیز قابل تعریف می‌باشند. در حقیقت دترمینان تابعی است ازمجموعهٔ ماتریسهای مربعی به‌مجموعه اعداد حقیقی .

ویژگیهای دترمینانهای مرتبه ۳

قوانین زیر برای دترمینانهای هرمرتبه درست است ولی ما آنها را برای دترمینانهای مرتبهٔ ۳ بیان می‌کنیم .

قانون ۱ـ هرگاه جای‌تمام‌سطرها وستونهای یک‌ماتریس را باهم عوض‌کنیم دترمینان آن ماتریس تغییر نمی‌کند . بعبارت دیگر $|A|=|A'|$

برای اثبات تساوی :

$$|A|=|A'|$$

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

دترمینان‌سمت راست رابرحسب سطراول بسط میدهیم :

$$\text{دترمینان‌سمت‌راست} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

$= $ دترمینان سمت چپ

زیرا طرف راست تساوی(۱) ، بسط دترمینان‌سمت چپ برحسب سطر اول آن است.

مثال :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|B| = 1(1\times 4 + 3\times 7) - 5(1\times 4 - 7\times 0) + 2(1\times -3 - 1\times 0)$$

$$= 25 - 20 - 6 = -1$$

$$|B'| = 1(1\times 4 + 3\times 7) - 1(5\times 4 + 2\times 3) + 0(5\times 7 - 1\times 2)$$

$$= 25 - 26 + 0 = -1$$

یعنی $|B| = |B'|$

قانون۲- ازتعویض دوسطر (یاستون) یک‌ماتریس مربع باهم ، تنها علامت دترمینان آن تغییرپیدا می‌کند . برای‌مثال :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

برای اثبات تساوی (۱) دترمینان سمت چپ را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم :

$$\text{سمت‌چپ‌تساوی(۱)} = a_1(c_2b_3 - b_2c_3) - a_2(c_1b_3 - c_3b_1) + a_3(c_1b_2 - c_2b_1)$$

$$= -a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + a_2(b_1c_3 - b_3c_1) - a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= -[a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)]$$
$$= \text{سمت راست تساوی}(1)$$

به‌همین‌ترتیب درستی مطلب برای تعویض هردوسطر یا هردوستون باهم اثبات می‌شود.

مثال:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

تعویض سطر اول و دوم باهم:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|B| = 2(0\times 1 - 2\times 5) - 3(4\times 1 + 1\times 5) - 1(4\times 2 + 0\times -1)$$
$$= -20 - 27 - 8$$
$$= -55$$
$$|B_1| = 4(3\times 1 + 1\times 2) - 0(2\times 1 - 1\times 1) + 5(2\times 2 + 3\times 1)$$
$$= 20 - 0 + 35 = 55$$

قانون ۳ـ هرگاه دوسطر (یادوستون) یک‌ماتریس مساوی باشند، دترمینان آن‌ماتریس برابرصفر است. مثلا فرض‌کنیم:

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

تعویض سطرهای دوم و سوم این ماتریس باهم، هیچ نوع تأثیری روی B نمی‌گذارد، درحالیکه بنابرقانون ۲، موجب تغییرعلامت |B| می‌گردد. پس‌داریم:

$$|B| = -|B|$$
$$2|B| = 0 \Longrightarrow |B| = 0$$

مثال:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1(2\times 0 - 3\times 4) - 2(1\times 0 + 3\times 1) + 3(1\times 4 + 1\times 2)$$
$$= -12 - 6 + 18 = 0$$

قانون ۴ـ هرگاه تمام عضوهای یک سطر یایک ستون یک ماتریس درعددی مثل k

ضرب شود دترمینان آن ماتریس در k ضرب می‌شود. مثلا :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

مقدار دترمینان طرف چپ تساوی برابر است : (برحسب ستون اول بسط داده‌ایم)

$$\text{طرف چپ} = a_1(kb_2)c_3 - a_1b_3(kc_2) + (ka_2)b_3c_1 - (ka_2)b_1c_3 + a_3b_1(kc_2) - a_3(kb_2)c_1$$

$$= k(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1)$$

$$= \text{طرف راست}$$

نتیجه ـ اگر تمام درایه‌های یك ماتریس ۳ × ۳ در k ضرب شود دترمینان آن ماتریس در k^3 ضرب می‌شود.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix} = k^3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

قانون ۵ـ هرگاه تمام درایه‌های یك سطر یا یك ستون ماتریس به‌صورت مجموع چندجمله باشد، آنگاه می‌توان دترمینان آن را نیز متناظراً به‌صورت مجموع چند دترمینان نوشت :

برای مثال :

$$\begin{vmatrix} u_1+v_1 & u_2+v_2 & u_3+v_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{طرف چپ} = (u_1+v_1)\,b_2c_3 - (u_1+v_1)\,b_3c_2 - (u_2+v_2)\,b_1c_3 + (u_2+v_2)\,b_3c_1 + (u_3+v_3)\,b_1c_2 - (u_3+v_3)\,b_2c_1$$

$$= [(u_1b_2c_3 - u_1b_3c_2) + (u_2b_3c_1 - u_2b_1c_3) + (u_3b_1c_2 - u_3b_2c_1)] + [(v_1b_2c_3 - v_1b_3c_2) + (v_2b_3c_1 - v_2b_1c_3) + (v_3b_1c_2 - v_3b_2c_1)] = \text{طرف راست}$$

قانون ۶ـ هرگاه به سطر (یا به ستون) یك ماتریس مضاربی از سطرهای دیگر (یا از ستونهای دیگر) اضافه شود دترمینان ماتریس حاصل با دترمینان ماتریس قبلی مساوی است. مثلا :

$$\begin{vmatrix} a_1+pa_2+qa_3 & b_1+pb_2+qb_3 & c_1+pc_2+qc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{طرف چپ}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+p\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+q\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(زیرا بقیه دترمینانها طبق‌قانون ۳ برابر صفر می‌باشند) طرف راست = $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$

قانون ۷- هرگاه A و B دوماتریس‌مربعی هم مرتبه باشند داریم :

$$|A \cdot B|=|A| \cdot |B|$$

یعنی دترمینان حاصلضرب دوماتریس برابراست با حاصلضرب دترمینانهای آن‌دوماتریس.

اثبات این‌قانون ازحوصله این‌کتاب خارج است وبه‌ذکر مثال زیر اکتفا می‌کنیم :

مثال :

$$\left|\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

قانون ۸- هرگاه درایه‌های یک‌سطر یایک ستون دترمینانی صفرباشد آن‌دترمینان‌برابر صفر است .

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}=0$$

برای اثبات دترمینان را برحسب سطری‌که صفر است بسط می‌دهیم .

قانون ۹

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}=adf$$

قانون ۱۰

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

دترمینان کهاد و همسازه

دیدیم که :

$$|B|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$ را دترمینان کهاد a ، و $\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$ را دترمینان کهاد b وبالاخره $\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$ را دترمینان کهاد c می‌گویند . پس :

$|B|=a$(دترمینان کهاد a)$-b$(دترمینان کهاد b)$+c$(دترمینان کهاد c)

همچنین

$\Delta_{11}=\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}=+$(دترمینان کهاد a)

را همسازهٔ درایه a و

$\Delta_{12}=-\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}=-$(دترمینان کهاد b)

را همسازه درایه b و

$\Delta_{13}=+\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}=+$(دترمینان کهاد c)

را همسازهٔ درایه c می‌گویند با این قرارداد دربسط دترمینان ماتریس B خواهیم داشت :

$$|B|=a\Delta_{11}+b\Delta_{12}+c\Delta_{13}$$

به‌طورکلی اگر درماتریس :

ستون j

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1j}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2j}\cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots & a_{ij}\cdots & a_{in} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mj}\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ سطر iام

برای هردرایه a_{ij} ، سطر وستونی را که این درایه درمحل‌تلاقی آنها قرار دارد حذف کنیم ، ماتریسی به‌دست می‌آیدکه آن را به A_{ij} نشان می‌دهیم :

حذف ستون j ام

$$A_{ij}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{ij}\cdots a_{in} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mj}\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$ حذف سطر i ام

$|A_{ij}|$ را دترمینان کهاد درایه a_{ij} و $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ را همسازه a_{ij} می‌خوانند.

مثال ۱ـ بسط دترمینان ماتریس زیررا برحسب دترمینان کهادها وهمسازه‌های سطر سوم به دست آورید :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A|=6\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$=6|A_{31}|-2|A_{32}|+3|A_{33}|$$
$$=6\Delta_{31}+2\Delta_{32}+3\Delta_{33}$$

مثال ۲ـ بسط دترمینان ماتریس زیررا برحسب دترمینان کهادها وهمسازه‌های ستون دوم بدست آورید :

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|B|=-4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}-5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$=4\times-|B_{12}|+3|B_{22}|+5\times-|B_{32}|$$
$$=4\Delta_{12}+3\Delta_{22}+5\Delta_{32}$$

ماتریس همسازه و ماتریس الحاقی (وابسته) یك ماتریس

درماتریس :

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

ماتریس $N=[N_{ij}]$ که درآن $N_{ij}=\Delta_{ij}$ را ماتریس همسازهٔ A می‌خوانند .

$$N=\begin{bmatrix}\Delta_{۱۱} & \Delta_{۱۲} & \Delta_{۱۳}\\ \Delta_{۲۱} & \Delta_{۲۲} & \Delta_{۲۳}\\ \Delta_{۳۱} & \Delta_{۳۲} & \Delta_{۳۳}\end{bmatrix}$$

و ترانهادهٔ N را ماتریس الحاقی A می‌گویند :

$$N'=\begin{bmatrix}\Delta_{۱۱} & \Delta_{۲۱} & \Delta_{۳۱}\\ \Delta_{۱۲} & \Delta_{۲۲} & \Delta_{۳۲}\\ \Delta_{۱۳} & \Delta_{۲۳} & \Delta_{۳۳}\end{bmatrix}$$

مثال : ماتریس‌های همسازه والحاقی $\begin{bmatrix}۷ & -۵ & ۲\\ ۳ & ۴ & -۱\\ ۶ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ را بنویسید :

$$\Delta_{۱۱}=(-۱)^{۲}\begin{vmatrix}۴ & -۱\\ ۰ & ۰\end{vmatrix}=۰ \quad ، \quad \Delta_{۱۲}=(-۱)^{۳}\begin{vmatrix}۳ & -۱\\ ۶ & ۰\end{vmatrix}=-۶$$

$$\Delta_{۱۳}=(-۱)^{۴}\begin{vmatrix}۳ & ۴\\ ۶ & ۰\end{vmatrix}=-۲۴ \quad ، \quad \Delta_{۲۱}=(-۱)^{۳}\begin{vmatrix}-۵ & ۲\\ ۰ & ۰\end{vmatrix}=۰$$

$$\Delta_{۲۲}=(-۱)^{۴}\begin{vmatrix}۷ & ۲\\ ۶ & ۰\end{vmatrix}=-۱۲ \quad ، \quad \Delta_{۲۳}=(-۱)^{۵}\begin{vmatrix}۷ & -۵\\ ۶ & ۰\end{vmatrix}=-۳۰$$

$$\Delta_{۳۱}=(-۱)^{۴}\begin{vmatrix}-۵ & ۲\\ ۴ & -۱\end{vmatrix}=-۳ \quad ، \quad \Delta_{۳۲}=(-۱)^{۵}\begin{vmatrix}۷ & ۲\\ ۳ & -۱\end{vmatrix}=۱۳$$

$$\Delta_{۳۳}=(-۱)^{۶}\begin{vmatrix}۷ & -۵\\ ۳ & ۴\end{vmatrix}=۴۳$$

پس :

$$N=\begin{bmatrix}\Delta_{۱۱} & \Delta_{۱۲} & \Delta_{۱۳}\\ \Delta_{۲۱} & \Delta_{۲۲} & \Delta_{۲۳}\\ \Delta_{۳۱} & \Delta_{۳۲} & \Delta_{۳۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & -۶ & -۲۴\\ ۰ & -۱۲ & -۳۰\\ -۳ & ۱۳ & ۴۳\end{bmatrix}$$

$$N'=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & -۳\\ -۶ & -۱۲ & ۱۳\\ -۲۴ & -۳۰ & ۴۳\end{bmatrix}$$

تمرین

۱ـ دترمینان هریك ازماتریسهای زیررا بهدستآورید :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۴ & ۸ \\ ۴ & ۸ & ۱۶ \end{bmatrix}،B=\begin{bmatrix} ۸ & -۷ & ۶ \\ -۵ & ۴ & -۳ \\ ۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}،C=\begin{bmatrix} ۱۰۱ & ۱۰۲ & ۱۰۳ \\ ۸۵ & ۸۷ & ۸۹ \\ ۶۱ & ۶۴ & ۶۷ \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} ۱۱ & -۹ & ۱۳ \\ ۱۵ & ۰ & ۱۷ \\ ۱۳ & ۱۹ & -۵ \end{bmatrix}،E=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ & ۸ \\ ۲ & ۶ & ۱۸ & ۵ \\ ۴ & ۱۸ & ۸۱ & ۳۲۴ \\ ۸ & ۵ & ۳۲۴ & ۰ \end{bmatrix}،F=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۷ & ۹ \\ -۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۹ & -۷ & ۵ & -۳ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

۲ـ درتمرین ۱ ، دترمینان هریك ازماتریسهای AB و BD را بدست آورید .

۳ـ با استفاده ازخواص دترمینانها ثابت کنید :

$$\begin{vmatrix} ۱+a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ a_۱ & ۱+a_۲ & a_۳ \\ a_۱ & a_۲ & ۱+a_۳ \end{vmatrix}=۱+a_۱+a_۲+a_۳$$

۴ـ با استفاده ازخواص دترمینانها ثابت کنید :

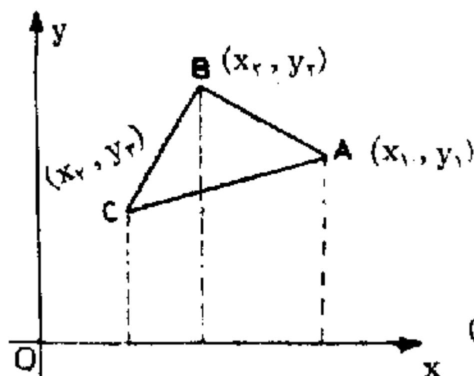
$$\begin{vmatrix} ۱+x^۲ & x & ۰ \\ x & ۱+x^۲ & x \\ ۰ & -x & ۱+x^۲ \end{vmatrix}=(۱+x^۲)^۳$$

۵ـ بااستفاده ازخواص دترمینانها ثابت کنید :

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱+a & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱+a \end{vmatrix}=a^۲$$

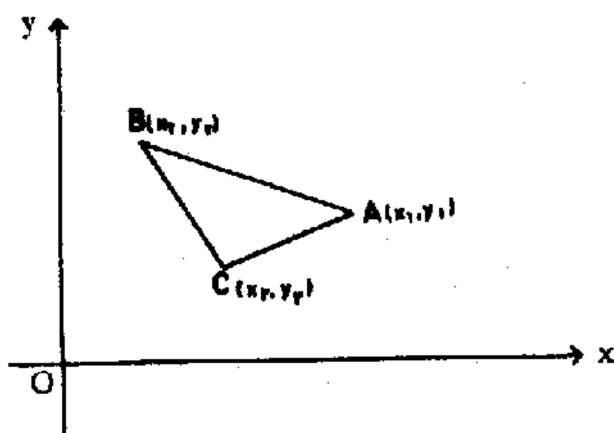
۶ـ درشکل زیر الف ـ مختصات نقاط A ، B و C بهترتیب عبارتند $(x_۱,y_۱)$، $(x_۲,y_۲)$ و $(x_۳ , y_۳)$ ، ثابت کنیدکه مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & ۲ \\ x_۳ & y_۳ & ۱ \end{vmatrix}$$



(راهنمائی : ازمساحت ذوزنقهها استفاده کنید)

ب- دترمینانی که مساحت مثلث زیر را تعیین می کند بنویسید.



با توجه به مطلب فوق آیا می‌توان گفت هرگاه $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ ، $C(x_3, y_3)$

رئوس مثلثی باشند آنگاه داریم ، $S_{ABC} = \frac{1}{2}|H|$ که در آن $H = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ ؟ وقتی $|H| = 0$ باشد چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت ؟

۷- نشان دهید که $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$ معادلهٔ خط راستی است که از نقاط (a, b) و (c, d) می‌گذرد.

۸- با توجه به مسئلهٔ ۸ ، معادلهٔ خطی که ازدو نقطهٔ (۲ ، ۱) و (۱ - ، ۳) می‌گذرد بنویسید.

۹- بدون بسط و با استفاده از ویژگیهای دترمینانهای مرتبه ۳ ثابت کنید که :

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ q+r & p+r & p+q \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۱۰- همسازه‌های p و q را در هریک از دترمینانهای زیر تعیین کنید.

$$\begin{vmatrix} p & q \\ a & b \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} p & q \\ 3 & -5 \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} a & 0 & q \\ b & p & 1 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} l & m & n \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix}$$

۱۱ــ هرگاه داشته باشیم :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۶ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

ماتریس همسازهٔ A ، یعنی N ، را بنویسید .

۱۲ــ اگر A یك ماتریس متقارن باشد ثابت کنید

$$|A+B|=|A+B'|$$

۱۳ــ اگر A یك ماتریس و به ازاء یکعدد صحیح فرد k ، $A^k=I$ نشان دهید

$$|A|=۱$$

۱۴ــ اگر A ماتریس مربعی باشد ثابت کنید

$$|A^*|=|A|^n$$

۱۵ــ فرض کنید $A=\begin{bmatrix} b & c & ۰ \\ a & ۰ & c \\ ۰ & a & b \end{bmatrix}$ ، AA' را حساب کنید و از آنجا بدون بسط ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} b^۲+c^۲ & ab & ac \\ ab & a^۲+c^۲ & bc \\ ac & bc & a^۲+b^۲ \end{vmatrix} = ۴a^۲b^۲c^۲$$

۱۶ــ اگر A یك ماتریس مربعی باشد ثابت کنید

$$|AA'| \geqslant ۰$$

۱۷ــ بدون بسط ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۶ & ۱۱ & ۱۶ & ۲۱ \\ ۲ & ۷ & ۱۲ & ۱۷ & ۲۲ \\ ۳ & ۸ & ۱۳ & ۱۸ & ۲۳ \\ ۴ & ۹ & ۱۴ & ۱۹ & ۲۴ \\ ۵ & ۱۰ & ۱۵ & ۲۰ & ۲۵ \end{vmatrix} = ۰$$

۱۸ ــ فرض کنید ماتریس ۳ × ۳ مانند C را بتوان به‌صورت حاصلضرب یک ماتریس ۳ × ۲ دریك ماتریس ۲ × ۳ نوشت نشان دهید $|C|=۰$

۱۹ـ بدون بسط ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} a-b & ۱ & a \\ b-c & ۱ & b \\ c-a & ۱ & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ۱ & b \\ b & ۱ & c \\ c & ۱ & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & a & bc \\ ۱ & b & ac \\ ۱ & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۱ & b & b^۲ \\ ۱ & c & c^۲ \end{vmatrix}$$

حل دستگاه معادلات با استفاده از ماتریس وارون (معکوس)

دستگاه

$$\begin{cases} x+۲y=۹ \\ ۲x+۷y=۱۶ \end{cases}$$

را با توجه به‌ضرب و تساوی ماتریسها به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ \\ ۱۶ \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} ۹ \\ ۱۶ \end{bmatrix}$$

را به‌ترتیب ازچپ به‌راست ماتریس ضرائب ، ماتریس مجهولات و ماتریس مقادیر معلوم می‌خوانند. آیا می‌توان یک‌ماتریس مربعی مرتبه ۲ پیداکرد به‌گونه‌ای‌که اگرآن‌را درماتریس ضرائب ازسمت چپ ضرب‌کنیم ماتریس $I_۲$ به‌دست‌آید؟ بطوری‌که در زیر می‌بینید جواب این سؤال مثبت‌است:

$$\begin{bmatrix} -۷ & ۴ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین برای حل معادله:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ \\ ۱۶ \end{bmatrix}$$

طرفین آن‌را درماتریس $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ بصورت زیر ضرب می‌کنیم :

$$\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریسها

$$\left(\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین : $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

دراینجا داریم :

$$\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ نسبت به‌عمل ضرب است کـه آنـرا وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ می‌نامیم .

ماتریس وارون

تعریف ـ اگر برای ماتریس مربعی $\mathbf{A}$ ماتریس مربعی $\mathbf{B}$ وجود داشته باشد بقسمی که $AB = BA = I$، آنگاه A را وارون‌پذیر (غیرمنفرد) نامیده و B را وارون A می‌گویند.

قضیه ـ اگر ماتریس مربعی $\mathbf{A}$ وارون پذیر باشد و وارون آن منحصر بفرد است .

اثبات ـ فرض می‌کنیم $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ هردو وارون $\mathbf{A}$ باشند یعنی :

$$\mathbf{AB=BA=I} \quad \text{و} \quad \mathbf{AC=CA=I}$$

بنابراین :

$$B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=C$$

تذکر ـ وارون A را با A^{-1} نشان می‌دهند .

به‌طورکلی :

برای حل یك دستگاه دومعادله و دو مجهول به‌صورت :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

باید ابتدا ببینیم آیا وارون ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ موجود است؟ درصورتی که جواب مثبت باشد ، ماتریس وارون آن را به‌دست‌آورده ، طرفین معادله (۱) را دراین ماتریس وارون ضرب نمود. بعبارت دیگر ، هرگاه ماتریس ضرائب را با A وماتریس مجهولات را با X وماتریس معلوم را با B نمایش دهیم ، معادلهٔ (۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$AX=B \qquad (۲)$$

برای حل این معادلهٔ ماتریسی ، بنابرآنچه دربالاگفته شد ، باید طرفین آنرا در وارون ضربی A (معکوس A) ، در صورت وجود ، ضرب‌کرد . اگـر وارون A یعنی A^{-1} موجود باشد . معادلهٔ (۲) را چنین حل می‌کنیم :

$AX=B$

$A^{-1}(AX)=A^{-1}B$ خاصیت تساوی :

$(A^{-1}A)X=A^{-1}B$ خاصیت شرکت‌پذیری :

$1X=A^{-1}B$ تعریف عضو وارون :

$X=A^{-1}B$ خاصیت عضو بی‌اثر :

یعنی به‌طورخلاصه درحالتی‌که A^{-1} موجود باشد ، برای تعیین X ، کافی است A^{-1} را از سمت چپ در B ضرب‌کنیم :

$$\boxed{AX=B \Longrightarrow X=A^{-1}B}$$

این دستور برای حل دستگاههای n معادله و n مجهول نیز درست است .

بنابراین همانطورکه دیدید ، جواب یك دستگاه معادله بستگی به‌وجود و تعیین وارون ماتریس ضرائب دستگاه دارد . **اینك شرط وجود و روش پیداکردن وارون یك ماتریس را بررسی می‌کنیم .**

ماتریس وارون یك ماتریس مربع مرتبه ۳

قضیه ـ شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس A وارون داشته باشد آن‌است که $|A|\neq 0$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

حاصلضربهای AN' و $N'A$ را حساب‌کرده نشان می‌دهیم که :

$$AN'=N'A=|A|I$$

(N' ماتریس الحاقی A است)

داریم :

$$AN'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

درایه سطر i ام و ستون j ام این حاصلضرب عبارتست از:

$$a_{i1}\Delta_{j1}+a_{i2}\Delta_{j2}+a_{i3}\Delta_{j3} \qquad (1)$$

(مثلا درایه سطر سوم و ستون دوم عبارتست از : $a_{31}\Delta_{21}+a_{32}\Delta_{22}+a_{33}\Delta_{23}$) . حال ثابت می‌کنیم‌که AN' یك ماتریس قطری است . یعنی ، وقتی $j=i$ ، مقدار (۱) برابر $|A|$ و هرگاه $i\neq j$ ، برابر صفر است.

الف ـ $i=j$ ، فرض‌کنیم $i=j=1$ ، دراینصورت با توجه به‌تعریف همسازه داریم :

$$a_{11}\Delta_{11}+a_{12}\Delta_{12}+a_{13}\Delta_{13}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$=|A|$$

و به‌همین ترتیب برای $i=j=2$ و $i=j=3$ ثابت می‌شود .

ب ـ اگر $i\neq j$ ، فرض‌کنیم $i=1$ و $j=2$ ، داریم :

$$a_{11}\Delta_{21}+a_{12}\Delta_{22}+a_{13}\Delta_{23}=-a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$=-a_{11}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+a_{12}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-a_{13}(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})$$
$$=-a_{11}a_{12}a_{33}+a_{11}a_{13}a_{32}+a_{12}a_{11}a_{33}-a_{12}a_{13}a_{31}-a_{13}a_{11}a_{32}+a_{13}a_{12}a_{31}$$
$$=0$$

به‌همین‌ترتیب برای سایرسطرها وستونهایی که درآنها $i\neq j$ ، ثابت می‌شود. بنابراین داریم :

$$AN'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & ۰ & ۰ \\ ۰ & |A| & ۰ \\ ۰ & ۰ & |A| \end{bmatrix}$$

$$= |A| \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

یعنی

$$AN' = |A| \, I_۳$$

به‌همین ترتیب ثابت می‌شود :

$$N'A = |A| \, I_۳$$

بنابراین داریم :

$$AN' = N'A = |A| \, I_۳$$

اگر $|A| \neq ۰$ ، طرفین این تساوی را بر $|A|$ تقسیم می‌کنیم خواهیم داشت :

$$A . \frac{N'}{|A|} = \frac{N'}{|A|} . A = I_۳$$

که باتوجه به‌تعریف عضووارون نسبت به‌عمل‌ضرب درمجموعه ماتریسهای ۳ × ۳ ومنحصر به‌فرد بودن آن نتیجه می‌شود که $\frac{N'}{|A|}$ وارون A است ، یعنی :

$$\boxed{A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} N'} \qquad (۲)$$

بنابراین اگر $|A| \neq ۰$ ، $A^{-۱}$ موجود است و بالعکس ، به‌طوری‌که دیدید ، اگر $A^{-۱}$ وارون ماتریس مربعی A باشد داریم :

$$A \, A^{-۱} = A^{-۱} A = I$$

بنابر ویژگی دترمینان بدست می‌آید : $|A| . |A^{-۱}| = |I| = ۱$ و چون $|A|$ و $|A^{-۱}|$ دو عدد هستندکه حاصلضرب آنها مخالف صفر است درنتیجه $|A| \neq ۰$. پس اگرماتریس A وارون‌پذیر باشد ، آنگاه $|A| \neq ۰$. بنابراین :

شرط لازم وکافی برای آنکه ماتریس A وارون داشته باشد آنستکه $|A| \neq ۰$.

تساوی (۲) دستورالعمل محاسبهٔ وارون یك ماتریس مرتبهٔ ۳ است ، این‌دستورالعمل‌را می‌توان برای تعیین وارون هرماتریس مربعی بکار برد .

مثال ــ وارون ماتریس زیررا حساب‌کنید :

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۶ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\text{همسازه } A = N = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 6 & -1 \\ 8 & -2 & -1 \\ 8 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{الحاقی } A = N' = \begin{bmatrix} -16 & 8 & 8 \\ 6 & -2 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2-18) - 2(0-6) + 2(0-1) = -8$$

طبق دستورالعمل داریم :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}N'$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -16 & 8 & 8 \\ 6 & -2 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{vmatrix}$$

دستور عملی برای محاسبه وارون یک ماتریس ۲×۲

هرگاه ماتریس A و ماتریس الحاقی آن N' را باهم مقایسه کنیم،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad ، \quad N' = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \text{ ؛}$$

می‌بینیم که ماتریس N' از تعویض جای درایه‌های قطر اصلی و تغییر علامت‌های درایه‌های قطر فرعی حاصل شده است . بنابراین برای تعیین وارون ماتریس مربعی ۲×۲ با توجه به $A^{-1} = \frac{1}{|A|}N'$ کافی است جای درایه‌های قطر اصلی را باهم عوض کرده و علامت‌های درایه‌های قطر فرعی را تغییر داده سپس آنرا درعکس دترمینانش ضرب کرد .

مثال ـ وارون ماتریسهای زیررا بنویسید :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad ، \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

طبق دستور فوق داریم :

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۲\times۳-۴\times۵}\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ -۵ & ۲\end{bmatrix}=-\frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ -۵ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۱۴} & \frac{۲}{۷}\\ \frac{۵}{۱۴} & -\frac{۱}{۷}\end{bmatrix}$$

$$B^{-۱}=\frac{۱}{-۳۶-۱۸}\begin{bmatrix}۱۲ & -۶\\ -۳ & -۳\end{bmatrix}=\frac{۱}{-۵۴}\begin{bmatrix}۱۲ & -۶\\ -۳ & -۳\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۸}\begin{bmatrix}-۴ & ۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$$

چند مثال

۱ـ مطلوبست حل دستگاه معادلات :

$$\begin{cases}۶x+۳y=۷\\ ۴x+۲y=۱\end{cases}$$

چون $\begin{vmatrix}۶ & ۳\\ ۴ & ۲\end{vmatrix}=۰$ ، ماتریس ضرائب وارون ندارد و دستگاه بدینطریق دارای جواب نیست.

۲ـ مطلوبست حل دستگاه معادلات :

$$\begin{cases}۵x-۳y=۹\\ ۲x+y=۸\end{cases}$$

چون $\begin{vmatrix}۵ & -۳\\ ۲ & ۱\end{vmatrix}=۱۱$ ، درنتیجه دستگاه دارای جواب است .

$$\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹\\ ۸\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}۹\\ ۸\end{bmatrix}$$

$$=\frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ -۲ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۹\\ ۸\end{bmatrix}$$

$$=\frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix}۳۳\\ ۲۲\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}$$

۳ـ مطلوبست حل دستگاه :

$$\begin{cases}۳x-y+۵z=۳۲\\ ۵x-۷y+۳z=-۸\\ x-۱۱y+۷z=۲۰\end{cases}$$

صورت ماتریسی دستگاه عبارتست :

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۵ \\ ۵ & -۷ & ۳ \\ ۱ & -۱۱ & ۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۲ \\ -۸ \\ ۲۰ \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

بسادگی دیده می‌شود که :

$$|A| = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۵ \\ ۵ & -۷ & ۳ \\ ۱ & -۱۱ & ۷ \end{bmatrix} = -۲۵۶ \quad N = \begin{bmatrix} -۱۶ & -۳۲ & -۴۸ \\ -۴۸ & ۱۶ & ۳۲ \\ ۳۲ & ۱۶ & -۱۶ \end{bmatrix}$$

$$N' = \begin{bmatrix} -۱۶ & -۴۸ & ۳۲ \\ -۳۲ & ۱۶ & ۱۶ \\ -۴۸ & ۳۲ & -۱۶ \end{bmatrix} = -۱۶ \begin{bmatrix} +۱ & +۳ & -۲ \\ +۲ & -۱ & -۱ \\ +۳ & -۲ & +۱ \end{bmatrix} .$$

حال طرفین معادلهٔ ماتریسی را در $\frac{۱}{|A|}N'$ ضرب می‌کنیم :

$$\frac{۱}{۱۶}\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۲ \\ ۲ & -۱ & -۱ \\ ۳ & -۲ & +۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۵ \\ ۵ & -۷ & ۳ \\ ۱ & -۱۱ & ۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۶}\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۲ \\ ۲ & -۱ & -۱ \\ ۳ & -۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳۲ \\ -۸ \\ ۲۰ \end{bmatrix}$$

$$I_۳ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۶}\begin{bmatrix} -۳۲ \\ ۵۲ \\ ۱۳۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -۲ \\ \frac{۱۳}{۴} \\ \frac{۳۳}{۴} \end{vmatrix}$$

دستور کرامر

یکی ازموارد استعمال دترمینان حل دستگاه معادلات به‌کمك دستور کرامر می‌باشد که آنرا درحالت سه‌معادله وسه‌مجهول بررسی می‌کنیم ومی‌توان آنرا برای حالت کلی نیزتعمیم داد.

دستگاه معادلات بصورت :

$$\begin{cases} a_۱x + b_۱y + c_۱z = d_۱ \\ a_۲x + b_۲y + c_۲z = d_۲ \\ a_۳x + b_۳y + c_۳z = d_۳ \end{cases} \qquad (۱)$$

داده شده و دترمینان ماتریس ضرائب آن مخالف صفر فرض شده است یعنی :

$$\text{دترمینان ماتریس ضرائب} = \Delta = \det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

ستونهای این ماتریس از چپ به راست به ترتیب ضرائب x ، y ، z می‌باشند. دترمینانهای زیر را دترمینانهای متناظر با مجهولهای x ، y ، z خوانده آنها را به ترتیب به Δ_x ، Δ_y ، Δ_z نشان می‌دهند.

درماتریس ضرائب ، بجای ستون اول مقادیر ثابت آمده است :

$$\Delta_x = \det\begin{bmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

در ماتریس ضرائب بجای ستون دوم مقادیر ثابت آمده است :

$$\Delta_y = \det\begin{bmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

درماتریس ضرائب بجای ستون سوم مقادیر ثابت آمده است :

$$\Delta_z = \det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

دستور کرامر جوابهای دستگاه (۱) را به صورت زیر ارائه می‌دهد .

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} \end{cases}$$

اثبات تساوی بالا را درزیر بیان می‌کنیم :

ابتدا دترمینان ضرائب دستگاه را می‌نویسیم :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

طرفین این تساوی را در x ضرب می‌کنیم : (هرگاه بخواهیم دترمینانی را در عددی ضرب کنیم کافی است آن را در یک سطر یا یک ستون آن ضرب کنیم)

$$\Delta \cdot x = \begin{vmatrix} a_1 x & b_1 & c_1 \\ a_2 x & b_2 & c_2 \\ a_3 x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

طبق قانون ۶ هرگاه y برابر ستون دوم و z برابر ستون سوم را برستون اول بیافزائیم دترمینان تغییر نمی‌کند .

$$\Delta \cdot x = \begin{vmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z & b_1 & c_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z & b_2 & c_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

بجای ستون اول دترمینان طرف راست ، طبق دستگاه (۱) ، مقادیرشان را قرارمی‌دهیم:

$$\Delta \cdot x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta \cdot x = \Delta_x$$

روش اثبات برای دستگاه n مجهولی نیز بهمین طریق است .

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

دستورالعمل فوق برای حل دستگاه :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

دستور کرامر برای حل n معادله و n مجهول نیز درست است .

مثال ـ مطلوبست حل دستگاه :

$$\begin{cases} 2x+3y+z=11 \\ 3x-2y-z=-4 \\ x-y+3z=8 \end{cases}$$

طبق دستور کرامر داریم :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 11 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}} ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \\ 1 & 8 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}} ; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 3 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}$$

که پس ازمحاسبه خواهیم داشت :

$$(x,y,z)=(1,2,3)$$

شرط وجود جوابهای غیرصفر برای دستگاه معادلات همگن

تعریف ـ هرگاه مقادیر ثابت یکدستگاه معادلات درجه اول همگی صفرباشند آندستگاه را همگن گویند .

دستگاه زیر یکدستگاه معادلات همگن است.

$$\begin{cases} a_1x+a_2y+a_3z=0 \\ b_1x+b_2y+b_3z=0 \\ c_1x+c_2y+c_3z=0 \end{cases}$$

برای تعیین جوابهای این دستگاه گوئیم :

الف ـ اگر $\Delta\neq 0$ باشد طبق دستور کرامر داریم :

$$\Delta\cdot x=\Delta_x \quad و \quad \Delta\cdot y=\Delta_y \quad و \quad \Delta\cdot z=\Delta_z \qquad (1)$$

چون هریك ازدترمینانهای Δ_x ، Δ_y ، Δ_z دارای یك ستون صفر میباشند، پس طبق قانون ۸ دترمینانهای هر کدام برابر صفر است ، در نتیجه تنها جواب دستگاه عبارتست از :

$$z=0 \text{ ، } y=0 \text{ ، } x=0$$

ب ـ اگر $\Delta=0$ باشد آنگاه دستگاه (۱) بصورت زیر در میآید.

$$0\cdot x=0 \quad و \quad 0\cdot y=0 \quad و \quad 0\cdot z=0$$

و دارای جوابهای بی‌شمار خواهد بود.

لذا شرط وجود جوابهای مخالف صفر دستگاه همگن فوق این است که:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

یعنی شرط وجود جوابهای غیر از صفر برای یك دستگاه همگن این است که دترمینان ماتریس ضرائب آن صفر باشد.

قضیه ۱ ـ هرگاه A و B ماتریسهای مربعی باشند و $AB = I$ ، آنگاه A وارون‌پذیر بوده و $BA = I$

برهان ـ داریم: $1 = |I| = |AB| = |A| \cdot |B| \Longrightarrow |A| \neq 0$، پس A وارون‌پذیر است.

بنابراین: $B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I = A^{-1}$ ، $BA = A^{-1}A = I$.

قضیه ۲ ـ هرگاه A و B دو ماتریس وارون‌پذیر باشند داریم :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

برهان ـ بنابر قضیه ۱ کافی است ثابت کنیم $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$

برای اینکار می‌نویسیم :

شرکت‌پذیری : $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$

تعریف وارون : $= AIA^{-1}$

تعریف عضو بی‌اثر : $= AA^{-1}$

تعریف وارون : $= I$

قضیه ۳ ـ هرگاه A وارون‌پذیر و A' ماتریس ترانهاده آن باشد داریم :

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

برهان ـ دیدیم که $(AB)' = B'A'$ ، دراین تساوی بجای B ماتریس A^{-1} قرار می‌دهیم می‌شود :

$$(AA^{-1})' = (A^{-1})'A'$$

$$I = (A^{-1})'A' \qquad (1)$$

اینک شرط قضیه ۱ برقرار است پس :

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

ماتریسهای مقدماتی وعملهای سطری یا ستونی مقدماتی

درتعیین ماتریس وارون ماتریسهای مرتبه ۴ وبالاتر ، معمولا از کامپیوتر یا ماشینهای محاسبه استفاده می‌شود. برای اینکار، ماشین ماتریسهائی بنام ماتریسهای مقدماتی بکار می‌برد باین ترتیب که ازخواص این ماتریسها استفاده نموده با ضرب تعدادی از آنها درماتریس‌مفروضی آنرا به‌ماتریس همانی تبدیل می‌کند و ازآنجا حاصلضرب این تعداد ماتریسهای مقدماتی که همان ماتریس وارون موردنظر است به‌دست می‌دهد .

عملهای سطری مقدماتی:

تعریف - روی یك ماتریس A، عملهای زیر را، عملهای سطری مقدماتی گویند.

۱- جای سطرهای یك ماتریس عوض شود .

۲- یك سطر دریك عددی مخالف صفر ضرب شود .

۳- مضربی غیر صفر ازیك سطر بهسطر دیگر اضافه گردد .

اگر اعمال‌فوق بجای اینکه روی سطرها انجام شود درمورد ستونها انجام‌گردد آنها را عملیات ستونی مقدماتی نامند .

مثال : هرگاه $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۵ & ۸ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۷ & ۶ \end{bmatrix}$ آنگاه باانجام دادن عملیات سطری‌مقدماتی ۱ ، ۲ ، ۳ ، فوق روی A به‌ترتیب ماتریس $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ بدست می‌آید .

$$A_۱ = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۱ & ۵ \\ ۱ & ۲ & ۵ & ۸ \\ ۲ & ۳ & ۷ & ۶ \end{bmatrix} \; ; \; A_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۵ & ۸ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۵ \\ ۴ & ۶ & ۱۴ & ۱۲ \end{bmatrix} \; ; \; A_۳ = \begin{bmatrix} ۵ & ۸ & ۱۹ & ۲۰ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۷ & ۶ \end{bmatrix}$$

تعریف - هرماتریس را که با انجام عملهای سطری مقدماتی روی I بدست می‌آید ماتریس مقدماتی‌می‌نامند . دترمینان هرماتریس مقدماتی مخالف صفر می‌باشد.

انواع ماتریسهای مقدماتی مرتبه ۲ که بااستفاده‌از اعمال سطری‌مقدماتی روی ماتریس $I_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ بدست‌آمده است عبارتند از: $(k \in \mathbb{R})$

۱- تعویض جای دوسطر ماتریس $I_۲$: $E_۱ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۲- ضرب یك سطر ماتریس $I_۲$ در k : $E_۲ = \begin{bmatrix} k & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و یا $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & k \end{bmatrix}$

۳ـ جمع کردن مضرب k یک‌سطر با سطر دیگر $\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}$ یا و $E_3=\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

اکنون خواص این ماتریسها را مورد بررسی قرار میدهیم . برای هر ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ چنین داریم :

۱ـ ازضرب ماتریس مقدماتی E_1 در A، جای سطرهای ماتریس A باهم عوض می‌شوند.

$$E_1A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & d\\ a & b\end{bmatrix}$$

۲ـ ازضرب‌ماتریس مقدماتی E_2 در A ، سطر اول A در k ضرب می‌شود .

$$E_2A=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka & kb\\ c & d\end{bmatrix}$$

ازضرب‌ماتریس مقدماتی E_2 در A ، سطر دوم A در k ضرب می‌شود .

$$E_2A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & d\\ c & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ kc & kd\end{bmatrix}$$

۳ـ ازضرب‌ماتریس‌مقدماتی E_3 در A به‌سطراول A ، مضربی‌ازسطردوم افزوده‌می‌شود.

$$E_3A=\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+kc & b+kd\\ c & d\end{bmatrix}$$

$$E_3A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ ka+c & kb+d\end{bmatrix}$$

نتیجه ۱ـ هرگاه ماتریسهای مقدماتی ازطرف چپ دریک ماتریس ضرب شود آنگاه عملیات سطری نظیربه آن ماتریس مقدماتی روی ماتریس انجام میگیرد .

حال ببینیم باتعویض جای A و Ei چه‌تغییری درحاصلضرب انجام می‌شود .

۱ـ ازضرب A در E_1 جای دو ستون A باهم عوض می‌شود .

$$AE_1=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b & a\\ d & c\end{bmatrix}$$

۲ـ از ضرب A در E_2 ، ستون اول یا دوم A در k ضرب می‌شود .

$$AE_2=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka & b\\ kc & d\end{bmatrix}$$

$$AE_2=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & bk\\ c & dk\end{bmatrix}$$

۳ـ ازضرب A در E_3، برستون دوم یااول A مضربی ازستون‌اول یادوم اضافه می‌شود .

$$AE_3=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & ak+b\\ c & ck+d\end{bmatrix}$$

$$AE_3=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+bk & b\\ c+dk & d\end{bmatrix}$$

نتیجهٔ ۲ ـ هرگاه ماتریس مقدماتی ازطرف راست دریك ماتریس ضرب شودآنگاه عملیات ستونی نظیر به‌آن ماتریس مقدماتی روی ماتریس انجام می‌گیرد .

ماتریسهای مقدماتی مرتبه ۳

درزیرماتریسهای‌مقدماتی مرتبه۳ بااستفاده‌ازاعمال سطری مقدماتی‌روی $I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ نوشته‌شده است :

۱ـ تعویض جای دوسطر I_3

$$E_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

۲ـ ضرب یك سطر I_3 در k

$$E_2=\begin{bmatrix}k & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & k\end{bmatrix}$$

۳ـ جمع کردن مضرب k یک سطر برسطر دیگر

$$E_۳=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & k\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & k\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}۱ & k & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$E_۳=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & k & ۱\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ k & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ k & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

دراینجا نیز اگر A یک ماتریس مرتبه ۳ باشد داریم :

۱ـ $E_۱A$ ، جای دوسطر A را باهم عوض می‌کند.

۲ـ $E_۲A$ ، یک سطر A را در عدد k ضرب می‌کند .

۳ـ $E_۳A$ ، مضربی ازیک سطر A برسطر دیگر میافزاید از تغییر E_iA به AE_i ، تغییرات متشابهی در ستونهای A حاصل می‌شود . اندیسهای ماتریسهای مقدماتی انتخابی است . یعنی دلیلی نداردکه ما همیشه $E_۱$ ، $E_۲$ ، $E_۳$ را به‌ترتیب فوق بکار ببریم . .

به‌طورکلی : برای بدست آوردن ماتریس E_iA (یا AE_i) کافی است عملی را که E_i روی I انجام می‌دهد روی سطر (یاستون) A انجام داد .

مثال : با استفاده از ماتریسهای مقدماتی معکوس ماتریس $\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}$ را حساب کنید (روش ماشینی) .

$$E_۲A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -\frac{۱}{۲}\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}$$

$$E_۳(E_۲A)=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -\frac{۱}{۲}\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -\frac{۱}{۲}\\ ۰ & \frac{۱۳}{۲}\end{bmatrix}$$

$$E_۳(E_۳E_۲A)=\begin{bmatrix}۱ & \frac{۱}{۱۳}\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -\frac{۱}{۲}\\ ۰ & \frac{۱۳}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & \frac{۱۳}{۲}\end{bmatrix}$$

$$E_4(E_3E_2E_1A)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{2}{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{13}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

و یا :

$$(E_4E_3E_2E_1)A=I$$

و باتوجه به‌اینکه $A^{-1}A=I$ و A^{-1} منحصر بفرد است نتیجه میشود :

$$A^{-1}=E_4E_3E_2E_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{2}{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{13}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

و یا :

$$A^{-1}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}5 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

تمرین

۱ــ وارون هریك ازماتریسهای زیررا پیدا کنید .

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} ، \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} ،$$

$$\begin{bmatrix}2 & 4 & -2\\ 6 & 10 & 4\\ 4 & 6 & 2\end{bmatrix} ، \begin{bmatrix}8 & 3 & 5\\ 4 & 11 & 7\\ 3 & 9 & 6\end{bmatrix}$$

۲ــ هرگاه داشته باشیم :

$$B=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

مطلوبست تعیین : B^{-1} ، B' ، BB' ، $B^{-1}B'$.

۳ــ دستگاه معادلات زیررا با استفاده ازماتریسهای وارون حل کنید .

$$\begin{cases}x+y=3\\ x-y=1\end{cases} ، \begin{cases}5x-2y=10\\ 3x-5y=15\end{cases} ، \begin{cases}x+y+z=6\\ 2x-y=0\\ x+y=z\end{cases} ، \begin{cases}x+7y+2z=4\\ x-7y+2z=2\\ 7x+z=6\end{cases}$$

۴ــ دستگاه معادلات تمرین ۳ را با استفاده از دستورکرامر حل کنید .

۵ــ وارون ماتریس A را حساب و دستگاه مربوط را حل کنید.

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۴ \\ ۵ & -۲ & -۳ \\ ۲ & -۳ & -۴ \end{bmatrix} \qquad A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

۶ ـ ماتریس زیر مفروض است :

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۶ \\ ۶ & ۲ & -۳ \\ ۳ & -۶ & ۲ \end{bmatrix}$$

AA' و $A'A$ راحساب کنید و از آنجا بامحاسبه نشان دهید $A^{-۱}=\frac{۱}{۴۹}A'$

۷ ــ a را قسمی تعیین کنید که دستگاه زیر دارای جواب غیرصفر باشد .

$$\begin{cases} x+y-az=۰ \\ ax+۲y-z=۰ \\ ۲x-ay+۲z=۰ \end{cases}$$

۸ــ چه‌رابطه‌ای بین a ، b و c برقرار باشد تا دستگاه زیر دارای جواب غیرصفر باشد.

$$\begin{cases} ax+by+cz=۰ \\ bx+cy+az=۰ \\ cx+ay+bz=۰ \end{cases}$$

۹ ــ هرگاه B یک ماتریس وارون‌پذیر باشد ، ثابت کنید .

الف ـ اگر $BB'=B'B$ ، آنگاه $B'B^{-۱}=B^{-۱}B'$

بـ باتوجه به‌حکم الف ، اگر $C=B^{-۱}B'$ ، آنگاه $CC'=I$

۱۰ــ ثابت کنید که اگر دوماتریس A و B تعویض پذیر و وارون‌پذیر باشند ماتریسهای $A^{-۱}$ و B و همچنین $A^{-۱}$ و $B^{-۱}$ نیز تعویض‌پذیرند .

۱۱ـ الف ـ اگر A ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد ثابت کنید:

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$

ب ـ اگر A متقارن و وارون‌پذیر با همسازه‌های $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ ثابت کنید:

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$$

۱۲ـ هرگاه A یك ماتریس مربع وارون‌پذیر باشد ثابت کنید

$$A^{-1} = (A'A)^{-1}A'$$

۱۳ـ ثابت کنید وارون ماتریس :

$$A_\alpha \ B_\beta = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

ماتریس $B_{-\beta} A_{-\alpha}$ است .

۱۴ـ وارون هریك از ماتریسهای دست چپ زیر را به‌دست آورده و از آنجا وارون A را حساب کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1+\lambda\mu & \lambda & 0 \\ \mu & 1+\lambda\mu & \lambda \\ 0 & \mu & 1 \end{bmatrix}$$

۱۵ـ ثابت کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -tg\theta \\ tg\theta & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow I+A = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} (I-A)$$

۱۶ـ ثابت کنید که :

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

۱۷ـ هرگاه داشته باشیم :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

ماتریسهای مقدماتی E_x، E_y، E_z را بەقسمی پیداکنید که $E_xA=B$ ، $E_yB=C$ و $E_zC=I$.

۱۸ـ هرگاه $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$ ، با اعمال مقدماتی روی A ماتریس B را بەدست آورید ;

$$B=\begin{bmatrix} 1+da & d & 0 \\ a & 1+da & d \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

۱۹ـ اگر A و B متقارن وارون‌پذیر وجابجاپذیر باشند نشان‌دهید AB، $A^{-1}B$، AB^{-1} و $A^{-1}B^{-1}$ متقارن هستند.

۲۰ـ فرض کنید A_1، A_2، A_3، X و Y ماتریسهای $n\times n$ و ۴ ماتریس اول وارون‌پذیر باشند ثابت کنید ماتریس $Y=A_1XA_2XA_3$ وارون‌پذیر است

۲۱ـ اگر A ماتریس مربعی وارون‌پذیر و $A+B$ و $A-B$ نیز وارون‌پذیر باشند ثابت کنید:

الف ـ $(A+B)A^{-1}(A-B)=(A-B)A^{-1}(A+B)$

ب ـ $(A-B)^{-1}A(A+B)^{-1}=(A+B)^{-1}A(A-B)^{-1}$

۲۲ـ اگر C وارون‌پذیر باشد نشان دهید برای هرماتریس X هم مرتبه با C داریم:

$|CXC^{-1}|=|X|$

۲۳ـ فرض کنید A یک ماتریس دلخواه $n\times n$ و C یک ماتریس وارون‌پذیر $n\times n$ باشد ثابت کنید

$$(C^{-1}AC)^n=C^{-1}A^nC$$

۲۴ـ اگر B ماتریس مربعی و AB یک مضرب غیرصفر ماتریس همانی باشد نشان دهید $AB=BA$.

تبدیل درصفحه با استفاده ازماتریسها

هرگاه‌ماتریس‌مربع $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را دربردار ستونی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ بەصورت زیر ضرب کنیم :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

بردار ستونی جدیدی مثل $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

که می‌نویسند :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{تحت ماتریس } A}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

می‌خوانند نقطهٔ (x,y) تحت ماتریس A به‌نقطهٔ (x',y') تبدیل یافته یا بر (x',y') تصویر شده است به‌عبارت دیگر ماتریس A نظیر یک تابع T_A بصورت زیر است :

$$T_A : R^۲ \rightarrow R^۲$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \overset{T_A}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

و یا

$$T_A : R^۲ \rightarrow R^۲$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\xrightarrow{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

معادلهٔ ماتریسی (۱) را به‌صورت :

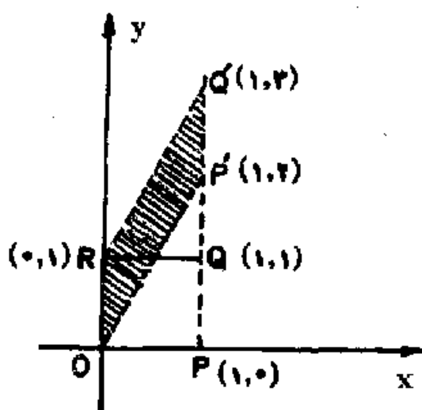
$$\begin{cases} ax+by=x' \\ cx+dy=y' \end{cases}$$

نوشته آنها را معادلات تبدیل خطی درصفحه می‌خوانند .

مثال– تبدیل یافته‌های (تصویر) نقاط $O(۰,۰)$ ، $P(۱,۰)$ ، $Q(۱,۱)$ و $R(۰,۱)$ را تحت ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید پیدا کنید .

حل :

$$O \overset{T_A}{\longrightarrow} O \quad \text{زیرا} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$



زیرا $P \xrightarrow{T_A} P'$ $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$

زیرا $Q \xrightarrow{T_A} Q'$ $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$

زیرا $R \xrightarrow{T_A} R$ $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$

بطورکلی تبدیل یافته یك خط مستقیم تحت ماتریس ۲ × ۲ خطی است مستقیم (چرا؟) پس مربع واحد OPQR درمثال بالا تحت ماتریس A به متوازی‌الاضلاع OP′Q′R تبدیل می‌گردد .

$$\text{مربع } OPQR \xrightarrow{T_A} \text{متوازی‌الاضلاع } OP'Q'R$$

همچنین معادلات تبدیل درمثال بالاعبارتند از :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = ۲x + y \end{cases}$$

یعنی هرنقطهٔ دلخواه (x,y) از صفحه تحت ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ به‌نقطهٔ $(x, ۲x+y)$ تبدیل می‌شود .

دراین قسمت ماتریس متناظر باهریك ازتبدیلهای‌معمول درهندسه مسطحه‌را پیدامی‌کنیم.

ماتریس تجانس ـ هرگاه $\vec{OM} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $\vec{OM'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ دو بردار باشند به‌طوریکه $\vec{OM'} = k\vec{OM}$ ، نقطه M' را مجانس M با نسبت k می‌نامند . بنابراین :

$$\vec{OM'} = k\vec{OM}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x' = kx + ۰y \\ y' = ۰x + ky \end{cases} \qquad (۱)$$

ماتریس ضرائب مجهولات دستگاه (۱) ، یعنی ماتریس اسکالر :

$$\begin{bmatrix} k & ۰ \\ ۰ & k \end{bmatrix}$$

را ماتریس تجانس می‌خوانند.

اگر $k>۱$ تصویر بزرگ می‌شود و اگر $۰<k<۱$ تصویر کوچک می‌گردد در حالت $k=۱$ تصویر تغییر نمی‌کند. (در حالتی که $k=-۱$ باشد تصویر قرینه شکل نسبت به مرکز تجانس می‌باشد).

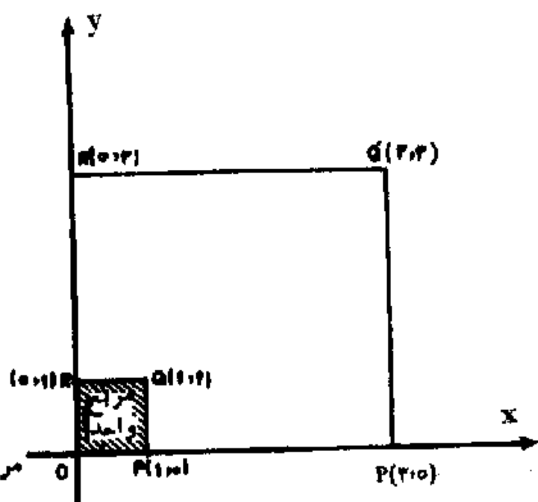
مثال- تبدیل مربع واحد **OPQR** را تحت ماتریس $A=\begin{bmatrix}۳&۰\\۰&۳\end{bmatrix}$ به‌دست آورید.

$O\xrightarrow{T_A}O$ زیرا $\begin{bmatrix}۳&۰\\۰&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$

$P\xrightarrow{T}P'$ زیرا $\begin{bmatrix}۳&۰\\۰&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix}$

$Q\xrightarrow{T_A}Q'$ زیرا $\begin{bmatrix}۳&۰\\۰&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\۳\end{bmatrix}$

$R\xrightarrow{T_A}R'$ زیرا $\begin{bmatrix}۳&۰\\۰&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\۳\end{bmatrix}$



مربع $OPQR \xrightarrow{T_A} OPQ'R'$ مربع

ماتریس دوران حول مبدأ مختصات ـ در کتاب ریاضیات جدید سال‌دوم، ماتریس دوران حول مبدأ درجهت مثبت واندازهٔ زاویهٔ θ را به‌صورت زیر به‌دست آوریم.

$$R_{\theta}=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$

هرگاه دراین ماتریس، θ را به $-\theta$ تبدیل کنیم ماتریس دوران حول مبدأ و باندازهٔ زاویهٔ θ درخلاف جهت مثبت به‌دست می‌آید:

$$R_{-\theta}=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$

مثال ۱ـ تصویر نقطهٔ دلخواه (x,y) را پس از دوران نقاط صفحه حول مبدأ مختصات و باندازه زاویه θ به‌دست آورید .

حل ـ هرگاه (x',y') ، مختصات تبدیل یافته (x,y) باشد داریم :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

که پس از ضرب ، (x',y') به‌دست می‌آید :

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}}$$

مثال ۲ـ هرگاه (x',y') ، تبدیل یافته نقطه (x,y) ازصفحه پس از دوران باندازهٔ θ حول مبدأ مختصات باشد مختصات (x,y) را برحسب (x',y') بنویسید .

حل ـ کافی است $R_{-\theta}$ را در $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ضرب کنیم :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

که پس از ضرب می‌شود :

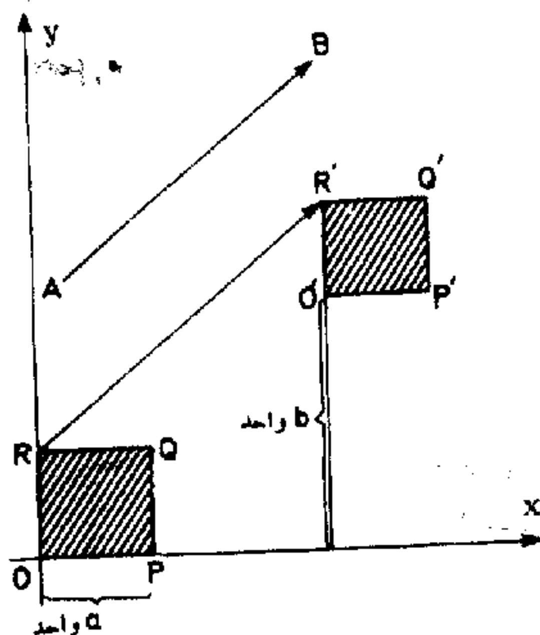
$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ y &= -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned}}$$

ماتریس انتقال ـ برای هر بردار $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ تابع زیر را داریم :

$$T : R^2 \to R^2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix}$$



راکه بنام انتقال درامتداد بردار $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ موسوم است متناظر می کنیم.

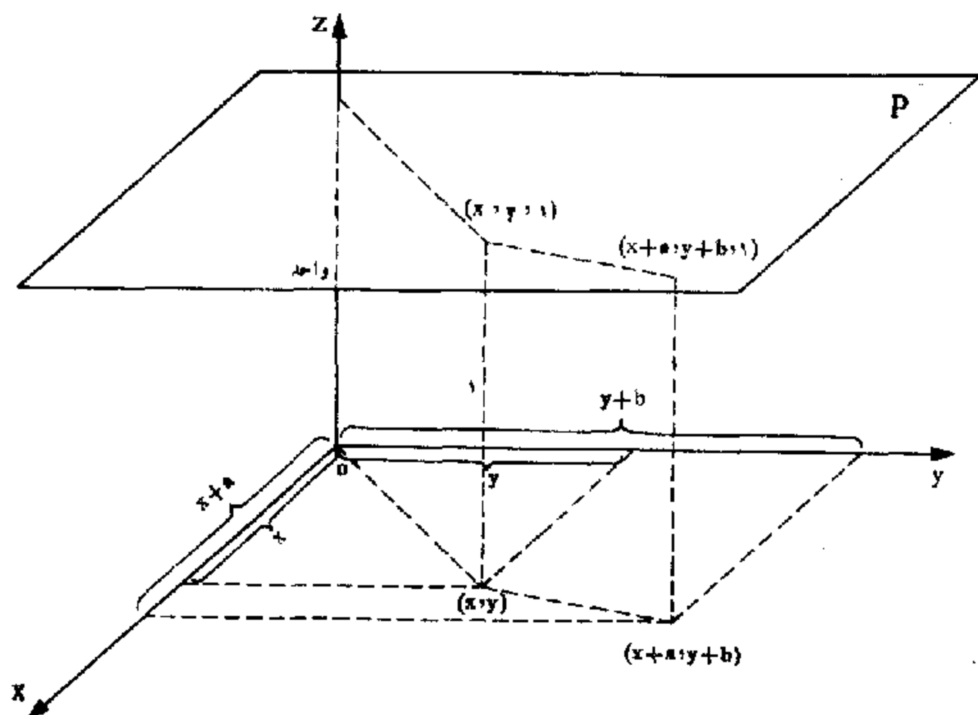
این تبدیل با استفاده از ضرب ماتریسهای ۲ × ۲ انجام پذیر نیست زیرا، مثلاً نقطه (۰,۰) تحت ماتریس ۲ × ۲ برخودش منطبق می‌شود درصورتی که در انتقال، نقطه (۰,۰) تغییر مکان پیدا می کند. اما اگر بعنوان مثال ماتریس ۳ × ۳ زیر را در نظر بگیریم:

$$T_{(a,b)}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & a \\ ۰ & ۱ & b \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

و توجه کنیم که :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & a \\ ۰ & ۱ & b \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

ماتریس $T_{(a,b)}$ هر نقطه از صفحه موازی xoy و ارتفاع واحد را به نقطهٔ $\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ ۱ \end{bmatrix}$ از این صفحه می‌برد اما نقطه $\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix}$ تصویر قائم نقطه $\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ ۱ \end{bmatrix}$ بر صفحه xoy است و این مانند این است که ماتریس $T_{(a,b)}$ هر نقطه (x,y) از xoy را به نقطه $(x+a,y+b)$ می‌برد. بعبارت دیگر هر بردار انتقال $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ درصفحه متناظر است با ماتریس $T_{(a,b)}$ بنابراین ماتریس $T_{(a,b)}$ را ماتریس انتقال درصفحه می‌خوانند.



مثال ـ ماتریس انتقال نظیر بردار $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ عبارتست :

$$T_{(-۱،۳)} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

این ماتریس هر نقطه $(x,y,۱)$ از صفحه موازی با xoy و بارتفاع یک را بـه نقطه $(x-۱,y+۳,۱)$ تبدیل می‌کند همچنین ملاحظه می‌کنیم که :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-۱ \\ y+۳ \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-۱ \\ y+۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیلهای متوالی (ماتریس ترکیبهای متوالی) ـ فرض کنیم نقطه (x,y) تحت

ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به‌نقطهٔ (x',y') و نقطه (x',y') تحت ماتریس $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ بـه نقطهٔ (x'',y'') تبدیل شود یعنی :

$$(۱)\quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$(۲)\quad \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

هرگاه در (۲) ، بجای x' و y' مقادیرشان از (۱) را قرار دهیم خواهیم داشت :

$$(۳)\quad \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

$$(۴)\quad \left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

تساوی (۴) نشان می‌دهد که ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$، مستقیماً نقطه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را به $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$ منتقل می‌کند و این در حالت کلی قابل تعمیم است. یعنی هرگاه نقطهٔ $A_۰$ تحت ماتریس $T_۱$ به $A_۱$ و $A_۱$ تحت $T_۲$ به $A_۲$ ونقطهٔ $A_۲$ تحت $T_۳$ به $A_۳$ و . . . و $A_{n-۱}$ تحت T_n به A_n منتقل شوند خواهیم داشت:

$$(۱)\ T_۱A_۰=A_۱ ؛ (۲)\ T_۲A_۱=A_۲ ؛ (۳)\ T_۳A_۲=A_۳ ، . . . ، (n)\ T_nA_{n-۱}=A_n$$

اگـر در تساوی (۲) بجای $A_۱$ مقدارش‌رااز تساوی (۱) قرار دهیم و سپس در (۳) بجای $A_۲$ مقدارش‌رابگذاریم و بهمین ترتیب ادامه دهیم می‌شود:

الف ــ $T_۲(T_۱A_۰)=A_۲$

$(T_۲T_۱)A_۰=A_۲$

ب ــ $T_۳(T_۲T_۱)A_۰=A_۳$

ه ــ $[T_n(T_{n-۱}\cdots T_۲T_۱)]A_۰=A_n$

یعنی ماتریس $T_nT_{n-۱}\cdots T_۲T_۱$ مستقیماً نقطهٔ $A_۰$ را به A_n می‌برد.

تبصره ـ اگر معادلات تبدیلات خطی (۱) و (۲) را بنویسیم و همان کاری را که درمورد ماتریس انجام دادیم درمورد معادلات نیز انجام دهیم یعنی در (۲) بجای x' و y' مقادیری از (۱) قرار دهیم و سپس ساده کرده معادلهٔ ماتریسی آن را بنویسیم نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

که با مقایسه (۴) و توجه به اینکه هر تبدیل درصفحه تنها یك ماتریس متناظر دارد نتیجه می‌شود

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{bmatrix}$$

که خود توجیهی برای عمل ضرب ماتریسهای ۲ × ۲ است.

مثال ـ با استفاده از دورانهای متوالی ، نسبتهای مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$ ، $\cos(\alpha+\beta)$ را به‌دست‌آورید .

حل ـ فرض‌کنیم نقطهٔ (x,y) تحت دوران R_α به نقطهٔ (x',y') ونقطهٔ (x',y') تحت دوران R_β به‌نقطهٔ (x'',y'') تصویر شده باشد. یعنی :

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

طبق آنچه گفته شد $R_\beta R_\alpha$ ، مستقیماً نقطه (x,y) را به (x'',y'') تبدیل می‌نماید . یعنی :

$$\left(\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

دراینجا به‌نقطه (x,y) دو دوران متوالی ، هم‌جهت ومثبت باندازه‌های α و β حول O داده‌ایم. بنابراین مثل این است که ما به (x,y) مستقیماً دورانی به‌اندازه $(\alpha+\beta)$ داده‌ایم . یعنی ماتریس $R_{(\alpha+\beta)}$ نقطه (x,y) را مستقیماً روی (x'',y'') تصویر می‌کند .

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

ازمقایسه (۱) و (۲) وتوجه باینکه تساوی به‌دست‌آمده برای همه مقادیر (x,y) ازجمله برای $(۱,۰)$ نیز درست است خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

و یا پس‌ازضرب دوماتریس‌مربع طرف راست می‌شود :

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha \\ \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta & -\sin\beta\sin\alpha+\cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

و یا پس‌از ضرب به‌دست می‌آید :

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \end{bmatrix}$$

که باتوجه به‌تعریف تساوی دوماتریس حاصل می‌شود :

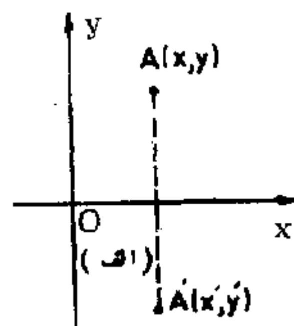
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

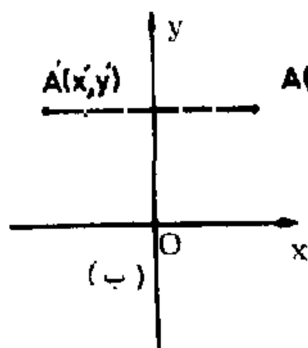
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

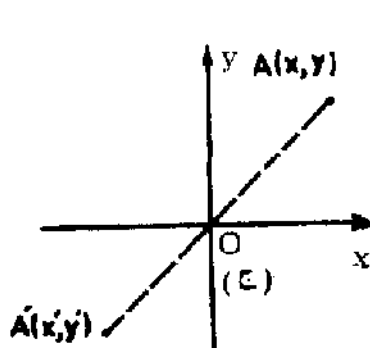
ماتریس تقارن نسبت به‌محورها و مبدأ مختصات ـ هرتبدیل خطی درصفحه را به‌صورت زیر نشان دادیم :

$$\begin{cases} ax+by=x' \\ cx+dy=y' \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

هرگاه قرینه (x,y) را به ترتیب از چپ به‌راست نسبت به‌محور x ها ، y ها و مبدأ مختصات به‌دست‌آوریم خواهیم داشت :







در الف ، طولهای A و 'A مساوی بوده ولی‌عرضهای آنها قرینه یکدیگرند پس‌معادلات تقارن نسبت به محور x ها عبارتست :

$$\begin{cases} x=x' \\ -y=y' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1x+0y=x' \\ 0x-1y=y' \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

در ب ، عرضهای A و 'A مساوی بوده ولی طولهای آنها قرینه یکدیگرند پس‌معادلات تقارن نسبت به‌محور y ها عبارتست :

$$\begin{cases} -x=x' \\ y=y' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -1x+0y=x' \\ 0x+1y=y' \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

در ج ، طولها و عرضهای A و 'A هردو قرینهٔ یکدیگرند :

$$\begin{cases} -x=x' \\ -y=y' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -1x+0y=x' \\ 0x-1y=y' \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرائب ، درحالات فوق ، به‌ترتیب ماتریس تقارن نسبت به‌محور x ها ، y ها ومبدأمختصات است .

ماتریس تقارن نسبت به‌خط ــ همانطور که در مورد ماتریس انتقال در صفحه دیـدیم ، ماتریسهای تقارن نسبت به‌محورها ومبدأ مختصات درصفحه‌ای به ارتفاع واحد و موازی صفحه xoy چنین است :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{محور } x \text{ ها}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{محور } y \text{ ها}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مبدأ}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

زیـرا ، هریك از این ماتریسها نقطهٔ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ از صفحهٔ موازی xoy را به $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$ دراین صفحه تبدیل می‌کند که تصویر قائم آن برصفحه xoy عبارتست از (x' و y') . بنابراین مثل این است‌که هریك ازماتریسهای ۳×۳ بالا نقطهٔ (x و y) را بر (x' و y')تصویر می‌نماید .

الف ــ تقارن نسبت به‌خط y = a ــ برای تعیین‌ماتریس تقارن نسبت به‌خط y = a به

ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

۱ـ با انتقال $\begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix}$ ، خط $y=a$ را برمحور x ها منطبق می‌کنیم . ماتریس این انتقال

$T_{(0,-a)}$ می‌باشد : که هرنقطه (۱ و y و x) را به‌صورت زیر منتقل می‌کند :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y-a \\ 1 \end{bmatrix}$$

۲ـ قرینهٔ تصویر جدید را نسبت به‌محور x ها درصفحهٔ موازی xoy به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y-a \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ a-y \\ 1 \end{bmatrix}$$

۳ـ با انتقال $\begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$ صفحه را به‌حالت اول برمی‌گردانیم .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ a-y \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ 2a-y \\ 1 \end{bmatrix}$$

نقطهٔ $(x,2a-y)$ قرینه (x,y) نسبت به $y=a$ بوده و ماتریسی که این تبدیل انجام می‌دهد حاصلضرب سه‌ماتریس فوق‌است .

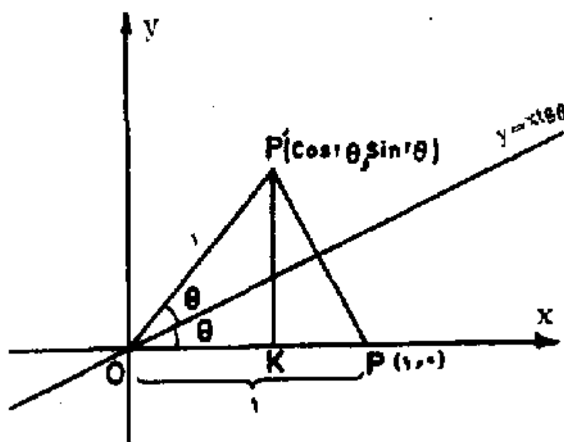
ماتریس تقارن‌نسبت به‌خط : $y=a$ برابراست‌با :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ب - ماتریس‌تقارن نسبت به خط $x=a$ ــ در اینجاابتدا به‌صفحه انتقال $T_{(-a,0)}$ می‌دهیم تاخط برمحور y ها قرارگیرد ، سپس قرینه نقاط صفحه را نسبت به‌محور y ها به‌دست می‌آوریم و درآخر با انتقال $T_{(a,0)}$ صفحه را بحالت اول برمی‌گردانیم ماتریس ترکیب این سه تبدیل حاصلضرب این سه‌ماتریس است .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ج - ماتریس تقارن نسبت به‌خط $y = mx$ ــ اگر چه تعیین این ماتریس به‌صورتهای فوق میسر است ، ولی ما دراینجا ازروشی‌که درسال دوم برای ماتریس دوران گفته‌ایم استفاده می‌کنیم . خط مزبور به‌صورت ، $y = x tg\theta$ که با محور x ها زاویهٔ θ می‌سازد درشکل زیر قرینه نقطه $P(1,0)$ نسبت به‌خط $y = x tg\theta$ ، نقطه P' است که مختصات آن با استفاده ازمثلث OKP' به صورت زیر به‌دست می‌آید :



$$x_{p}' = OK = 1 \times \cos 2\theta = \cos 2\theta$$

$$y_{p}' = KP' = 1 \times \sin 2\theta = \sin 2\theta$$

$$P \rightarrow P'$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix}$$

کــه بنابرآنچه درسال دوم دیدید ستون چپ ماتریس تقارن درخط مزبوراست . همچنین قرینه نقطهٔ $Q_{(0,1)}$ نسبت به‌خط $y = x tg\theta$ ، نقطهٔ Q' است‌کــه مختصات آن بـا استفاده از مثلث OKQ'، شکل زیر ، قابل محاسبه است.

$$x_{Q'} = OK = 1 \times \cos(90 - 2\theta) = \sin 2\theta$$

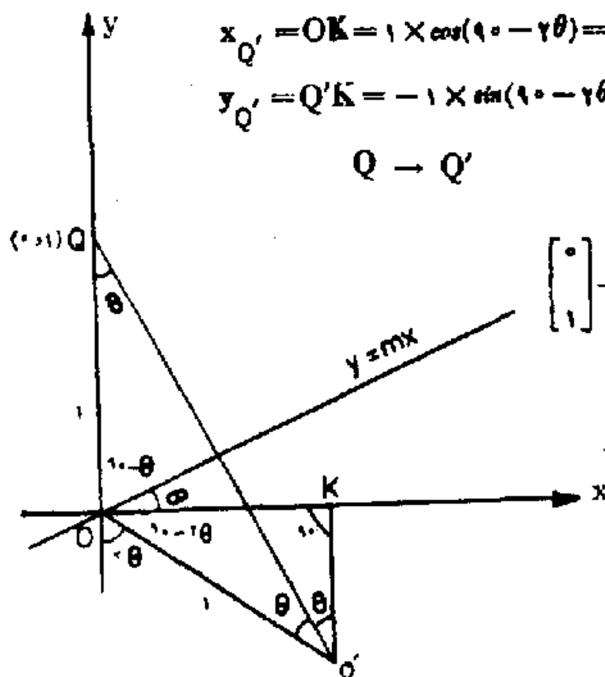
$$y_{Q'} = Q'K = -1 \times \sin(90 - 2\theta) = -\cos 2\theta$$

$$Q \rightarrow Q'$$

یعنی :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$Q'(\sin 2\theta, -\cos 2\theta)$$



که طبق آنچه درسال دوم دیدید ستون راست ماتریس تقارن در خط ، $y = x\,tg\theta$ است ، بنابراین ماتریس تقارن در خط $y = x\,tg\theta$ عبارتست :

$$S_1 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

تذکر ۱ـ هرگاه $\theta = 0$ ، $\theta = 45^\circ$ ، $\theta = 90^\circ$ یا $\theta = 135^\circ$ بگیریم، بترتیب‌ماتریس تقارن درمحور x ها، درخط $x = y$ درمحور y ها و در خط $y = -x$ به‌دست می‌آید .

تذکر ۲ ـ ماتریس S_1 فوق، درترکیب با ماتریس‌انتقال به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$S_1 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

د - ماتریس‌تقارن نسبت به‌خط $y = mx + c$ ـ برای‌تعیین ماتریس تقارن نسبت به‌خط $y = mx + c$ کافی است با انتقال $T_{(0, -c)}$ ، خط را به صورت $y = mx$ بیرون آورده ، و با استفاده از ماتریس قبل ماتریس تقارن در این خط را بنویسیم و سپس با انتقال $T_{(0, c)}$ صفحه را به‌وضع اول برمی‌گردانیم ماتریس مزبور باینصورت محاسبه میشود .

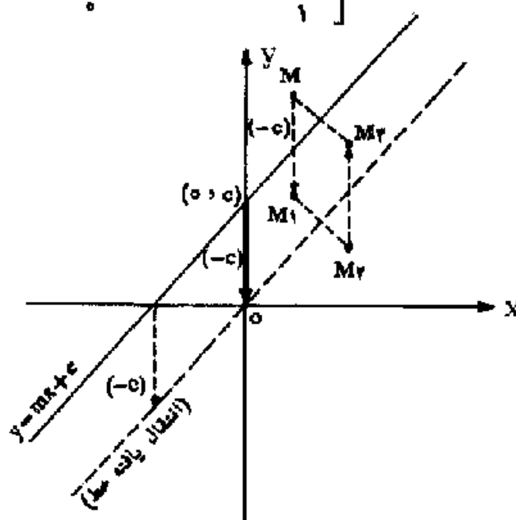
$$S = T_{(0, c)} \times S_1 \times T_{(0, -c)}$$

و یا :

$$S = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_{(0, c)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_{(0, -c)}}$$

که پس‌از محاسبه حاصل میشود :

$$S = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & -c\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & c(1 + \cos 2\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



ماتریس متعامد ـ ماتریس وارون پذیر A را یك ماتریس متعامد نامند هرگاه A^{-1} برابر ترانهاده‌اش A' باشد، بعبارت دیگر $A^{-1}=A'$.

هریك ازماتریسهای زیر متعامد است.

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ +\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

زیرا:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ +\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & +\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ویژگیهای ماتریس متعامد

۱ـ فرض کنیم A و B دو ماتریس متعامد هم مرتبه باشند بنابه‌تعریف داریم:

$$AA'=A'A=I \quad و \quad BB'=B'B=I$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned}(AB)(AB)' &= ABB'A' \\ &= A(BB')A'\end{aligned}$$

$$=AIA'$$
$$=AA'$$
$$=I$$

یعنی حاصلضرب دوماتریس متعامد هم‌مرتبه خود یک ماتریس متعامد است .

۲ـ معکوس یک‌ماتریس‌متعامدوترانهاده‌یک‌ماتریس‌متعامدخودماتریسهای متعامدند.(چرا؟)

۳ـ دترمینان یک‌ماتریس متعامد برابر ۱± است زیرا :

$$AA'=I \Rightarrow |A|.|A'|=|I|$$

چون دترمینانهای A و A' برابرند پس :

$$|A||A|=|I| \Rightarrow |A|^2=|I| \Rightarrow |A|^2=1 \Rightarrow |A|=\pm 1$$

۴ـ ماتریسهای متعامد هم‌مرتبه با عمل × تشکیل یک‌گروه می‌دهند. (چرا؟)

طول بردار مکان

درهندسه تحلیلی دیده‌اید ، که اگر V_1 و V_2 دو بردار باشند که بردار مکان آنها

$X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، $Y=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ باشد داریم :

$$V_1 \text{ طول } =|V_1|=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (1)$$
$$V_2 \text{ طول } =|V_2|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

ازطرفی باتوجه به‌تعریف ترانهاده داریم :

$$X'X=[x \ \ y]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=x^2+y^2 \qquad (2)$$

بامقایسه (۱) و (۲) :

$$|V_1|=(X'X)^{\frac{1}{2}}$$

همچنین درهندسه خوانده‌اید که

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}=xx_1+yy_1 \qquad (3)$$

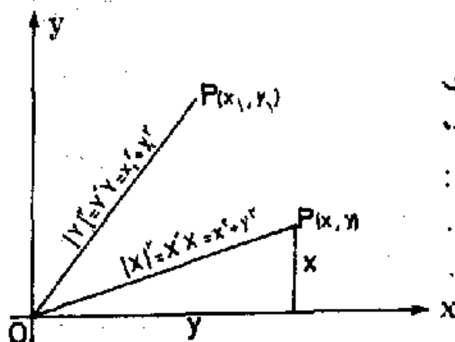
و درمحاسبات ماتریس نیز داریم :

$$X'Y=[x \ \ y]\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=xx_1+yy_1 \qquad (4)$$

با مقایسه (۳) و (۴) :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = X'Y$$

و باتوجه به‌تعریف ضرب اسکالر ، شرط لازم و کافـی برای آنکه دوبردار $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ برهـم عمود باشندآن است که $X'Y = 0$.



تبدیل متعامد و ویژگیهای آن ـ هر تبدیلی که ماتریس متناظرآن متعامد باشد تبدیل متعامد نامیده می‌شود . ایـن تبدیلات دارای ویژگیهای زیـرند :

۱ـ تبدیلهای متعامد طول راثابت نگهمیدارند.

۲ـ تبدیلهای متعامد زاویه راثابت نگهمیدارند.

برهان :۱ ـ اگر $\mathbf{X}$ برداری باشدکه تحت تبدیل متعامد $\mathbf{A}$ قرارگرفته باشد، داریم:

$X'X =$ مربع طول بردار $\mathbf{X}$

اگر تبدیل یافته $\mathbf{X}$ تحت ماتریس $\mathbf{A}$ را $\mathbf{Y}$ بخوانیم داریم :

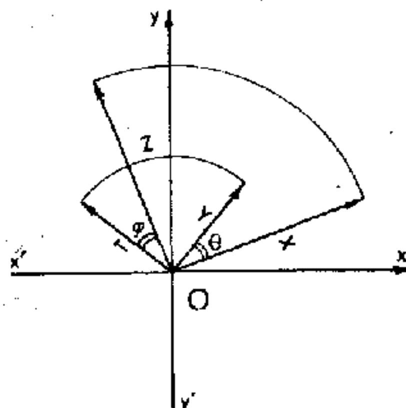
$AX = Y$ و $X'A' = Y'$

باتوجه به‌این تساویها می‌نویسیم :

$$\text{مربع‌طول } Y = Y'Y = X'A'AX$$
$$= X'IX$$
$$= X'X = \text{مربع طول } X$$

۲ـ هرگاه θ زاویه بین‌دوبردار $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ و φ زاویه بین دوبردار $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{T}$ ، تبدیل‌یافته آنها تحت تبدیل‌متعامد $\mathbf{A}$ باشد داریم:

$$\begin{cases} Z = AX \text{ و } Z' = X'A' \\ T = AY \text{ و } T' = Y'A' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |Z| = (Z'Z)^{\frac{1}{2}} = (X'X)^{\frac{1}{2}} = |X| \\ |T| = (T'T)^{\frac{1}{2}} = (Y'Y)^{\frac{1}{2}} = |Y| \end{cases} \quad (1)$$



ازطرفی ، طبق تعریف ضرب داخلی داریم :

$$X.Y=|X|.|Y|\ .\cos\theta \Longrightarrow \cos\theta=\frac{X.Y}{|X|.|Y|}$$

ویا باتوجه به‌مطالب خوانده شده :

$$\cos\theta=\frac{X'Y}{|X||Y|} \qquad (۲)$$

و بهمین ترتیب زاویهٔ بین Z و T بدست می‌آید :

چرا ؟ $$\cos\varphi=\frac{Z'T}{|T|\cdot|Z|}=\frac{X'A'AY}{|T|\cdot|Z|}=\frac{X'Y}{|X|\cdot|Y|} \qquad (۳)$$

از مقایسهٔ (۲) و (۳) نتیجه می‌شود: $\cos\varphi=\cos\theta$ که با توجه به‌محدب بودن زاویه‌ها داریم: $\varphi=\theta$

شرایط متعامدبودن یك ماتریس ۲ × ۲ – ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مفروض‌است هرگاه

A بخواهد متعامد باشد باید درشرایط زیر صدق کند :

$A'A=I$ و $AA'=I$

$$A'A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

یا :

$$\begin{bmatrix} a^۲+c^۲ & ab+cd \\ ab+cd & b^۲+d^۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ازتساوی این دوماتریس نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} a^۲+c^۲=۱ \\ ab+cd=۰ \\ b^۲+d^۲=۱ \end{cases} \qquad (۱)$$

اگر a و c اعدادحقیقی‌باشند، آنگاه $a^۲\geqslant ۰$ و $c^۲\geqslant ۰$ وچون $a^۲+c^۲=۱$ ، پس $c^۲\leqslant ۱$

$-1 \leqslant d \leqslant 1$ و $-1 \leqslant b \leqslant 1$ و به‌همین‌ترتیب $-1 \leqslant a \leqslant 1$ و $-1 \leqslant c \leqslant 1$ و با $a^2 \leqslant 1$ و
بنابراین می‌توان فرض کرد که :

$$a = \cos\theta ، b = \cos\varphi ، c = \sin\theta ، d = \sin\varphi \qquad (۲)$$

این مقادیر را در دومین تساوی دستگاه قرار داده و جوابها را در فاصله ۰ تا ۲π به دست می‌آوریم :

$$\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = ۰ \Longrightarrow \cos(\theta - \varphi) = ۰$$

$$\theta - \varphi = \frac{\pi}{۲} \Longrightarrow \varphi = \theta - \frac{\pi}{۲} \qquad (۳)$$

$$\theta - \varphi = \frac{۳\pi}{۲} \Longrightarrow \varphi = \theta - \frac{۳\pi}{۲} \qquad (۴)$$

بنابراین فقط دو ماتریس مربع مرتبهٔ ۲ متعامد وجود دارد و آنها عبارتند از :

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

که A ماتریس دورانی باندازه θ حول مبدأ مختصات و غیرمتقارن است و B ماتریس تقارن نسبت به‌خط $y = x\,tg\frac{\theta}{۲}$ و متقارن است . درایه‌های A و B با استفاده ازمفروضات (۲) وشروط (۳) و (۴) محاسبه شده‌اند. ازمحاسبهٔ AA' نیز به‌همین‌نتیجه می‌رسیم.

نتیجه : هرگاه ماتریس مرتبهٔ ۲ ، A متعامد بوده و X و Y دوستون‌آن باشند آنگاه $X'X = ۱$ و $Y'Y = ۱$ و $X'Y = ۰$. و بالعکس اگربرای یك ماتریس مرتبه ۲ ، A با ستونهای X و Y داشته باشیم بطوریکه $X'X = ۱$ ، $Y'Y = ۱$ ، $X'Y = ۰$ آنگاه A یك ماتریس متعامد است (چرا ؟)

تبصرهــ باید توجه‌داشت کــه فقط دو نوع ماتریس متعامد مرتبه دوم وجود دارد و ماتریسهای دیگری که درتعریف متعامد صدق می‌کنند ولی‌شکل ظاهری‌آنها به‌صورت‌فوق‌نیست باقدری تأمل قابل تبدیل به‌یکی ازصورتهای بالاست . مثلا :

۱ــ ماتریس $A_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ یك‌ماتریس متعامداست که‌زاویهٔ دوران‌آن $-\theta$ است.

۲ــ ماتریس $B_1 = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ کــه از تعویض ستونهای A بـا هم به دست می‌آید یك‌ماتریس متعامد است (درتعریف متعامد صدق می‌کند) ولی‌ظاهراً نه ماتریس دوران

است و نه‌تقارن دریك خط مفروض. اما درزیر می‌بینید که B_1 یك ماتریس تقارن نسبت به‌خطی است که با محور xها زاویهٔ $\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$ می‌سازد.

$$B_1=\begin{bmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) & \sin(\frac{\pi}{2}+\theta)\\ \sin(\frac{\pi}{2}+\theta) & -\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)\end{bmatrix}$$

۳ـ ماتریس A_2 که از تعویض ستونهای B به‌دست می‌آید باز به‌ظاهر با صورتهای A و B فرق دارد، اما در زیر دیده می‌شود که A_2 نیز متعامد ازنوع دوران است.

$$A_2=\begin{bmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta) & -\sin(\frac{3\pi}{2}+\theta)\\ \sin(\frac{3\pi}{2}+\theta) & \cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)\end{bmatrix}$$

بردارهای‌ویژه: تبدیل یافته بردارهای $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}$

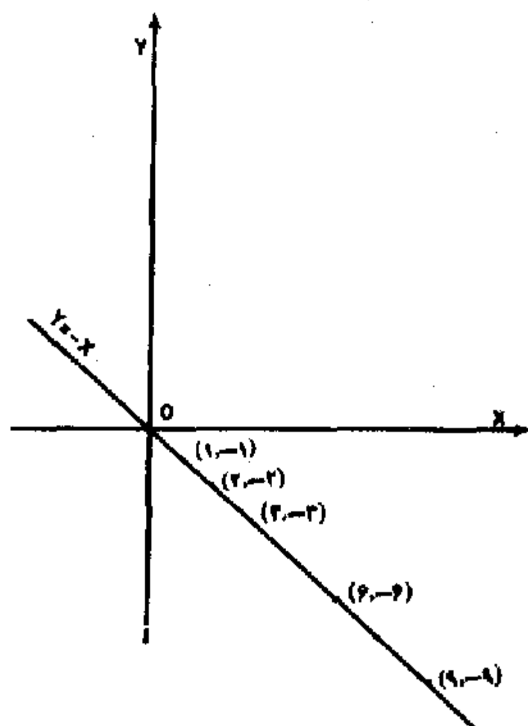
تحت ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ به‌ترتیب عبارتند از:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\-9\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}$$

درشکل صفحهٔ بعد دیده‌می‌شود که بردارهای داده‌شده وتبدیل یافته‌های آنها همه‌دارای امتدادمشترك $y=-x$ هستند. یعنی امتداد این بردارها پس‌از تبدیل تغییر نکرده است. در



اینجا عدد ۳ و بردارهای داده شده دارای اسامی خاصی هستندکه بعداً خواهید دید.

آنچه‌ازتساویهای بالانتیجه‌می‌شوداین‌است که این بردارهادارای‌خاصیت‌مهم‌زیرند: $(k=3)$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1)$$

برای تعیین k درحالت‌کلی ویا برای تعیین تمام بردارهائی‌که امتدادآنها تحت‌یک‌ماتریس مثل $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ ثابت می‌ماند چنین عمل می‌کنیم :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} (4-k)x+2y=0 \\ -3x+(-1-k)y=0 \end{cases}$$

شرط وجود جوابهای غیرازصفر برای این‌دستگاه معادلات همگن صفر بودن دترمینان ماتریس ضرائب آن است یعنی:

$$\begin{vmatrix} 4-k & 2 \\ -3 & -1-k \end{vmatrix}=0$$

واز آنجا داریم:

$$k^{۲}-۳k+۲=۰ \Longrightarrow (k-۱)(k-۲)=۰ \Longrightarrow (k=۱ \text{ یا } k=۲)$$

اگر $k=۲$ ، امتداد بردارها عبارتند:

$$(۴-k)\,x=-۲y \Longrightarrow (۴-۲)x=-۲y \Longrightarrow ۲x=-۲y \Longrightarrow \boxed{y=-x}$$

اگر $k=۱$ ، امتداد بردارها عبارتند:

$$(۴-k)x=-۲y \Longrightarrow (۴-۱)x=-۲y \Longrightarrow ۳x=-۲y \Longrightarrow \boxed{y=-\frac{۳}{۲}x}$$

اکنون باتوجه به مطالب فوق تعاریف زیررا می‌آوریم:

تعریف- فرض‌کنیم $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \overline{O}$ یك بردار و k یکعدد حقیقی باشد به‌قسمی که:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

یا

$$AX=kX$$

دراینصورت k رایك مقدار ویژه یایك ریشه سرشتنمائی ماتریس A و $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را بردار ویژه نظیر k می‌نامند. برای تعیین k درحالت کلی، طرف راست معادله ماتریسی را در $I_{۲}$ ضرب می‌کنیم می‌شود:

$$AX=kI_{۲}X$$

و یا:

$$(A-kI_{۲})\,X=\overline{O}$$

و یا:

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}-k\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\overline{O}$$

$$\begin{bmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\overline{O}$$

که پس‌از ضرب می‌شود:

$$\begin{cases} (a-k)x+by=۰ \\ cx+(d-k)y=۰ \end{cases}$$

و شرط جوابهای غیر از صفر، بسرای این دستگاه معادلات‌همگن، صفربودن دترمینان ماتریس ضرایبش است:

$$\begin{vmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{vmatrix} = 0$$

و یا: $(a-k)(d-k)-bc=0$

و یا: (۱) $\boxed{k^2-(a+d)k+(ad-bc)=0}$

معادلهٔ (۱) را معادلهٔ سرشتنمائی (مشخصه) ماتریس A نامند.

اگر $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ یك بردار ویژه ماتریس A باشد. برای هر $m \in R$،

$$m\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mx_1 \\ my_1 \end{bmatrix}$$

نیز یك بردار ویژه‌است زیرا:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} mx_1 \\ my_1 \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$= mk\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} mx_1 \\ my_1 \end{bmatrix}$$

نتیجه: هرگاه $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ یك بردار ویژه ماتریس A باشد هر مضرب آن نیز یك بردار ویژه ماتریس A است.

مثال- مطلوبست تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نظیر آن برای ماتریس:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

حل- داریم:

$$AX - kI_2X = \bar{O}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \bar{O} \qquad (1)$$

اگر دترمینان ماتریس ضرایب این دستگاه همگن برابر صفر باشد، آنگاه جوابهای غیراز صفر برای دستگاه موجوداست:

$$\begin{vmatrix} ۱-k & ۲ \\ ۲ & ۱-k \end{vmatrix} = k^۲ - ۲k - ۳ = ۰$$

$$(k-۳)(k+۱) = ۰ \Longrightarrow k = ۳ \text{ و } k = -۱$$

وجوابهای کلی برای بردارهای ویژه، با توجه به‌معادله (۱)، عبارتند:

$$\begin{bmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix} = m_۱ \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} x_۲ \\ y_۲ \end{bmatrix} = m_۲ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

خاصیتی برای بردارهای ویژه یك ماتریس متقارن: بردارهای ویژه ماتریس متقارن

$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ رامحاسبه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x+۲y = kx \\ ۲x-۲y = ky \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (۱-k)x+۲y = ۰ \\ ۲x-(۲+k)y = ۰ \end{cases}$$

شرط وجود جواب‌های غیر صفررا برای این دستگاه معادلات همگن می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} ۱-k & ۲ \\ ۲ & -(k+۲) \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow -(۱-k)(k+۲) - ۴ = ۰ \Longrightarrow k^۲ + k - ۶ = ۰$$

$$\Longrightarrow k = ۲ \text{ یا } k = -۳$$

اما متناظر با $k = ۲$، بردارویژه $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و متناظر با $k = -۳$ بردار ویژه $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ است که حاصلضرب اسکالرآنها برابر صفر است.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix} = ۰$$

یعنی دوبردار برهم عمودند واین مطلب درحالت کلی نیز درست است.

قضیه ــ فرض کنیم A یك‌ماتریس متقارن باشد که دومقدار ویژه متفاوت λ و μ دارد هرگاه X و Y به‌ترتیب بردارهای ویژه متناظر با λ و μ باشند آنگاه X و Y برهم عمودند.

برهان ــ چون X و Y بردارهای ویژه هستند داریم:

$$AX=\lambda X \quad (۱)$$
$$AY=\mu Y \quad (۲)$$

طبق خاصیت‌های ماتریس ترانهاده از (۲) به‌دست می‌آید:

$$Y'A'=\mu Y' \quad (۳)$$

طرفین (۳) را از طرف راست در X ضرب می‌کنیم:

$$Y'A'X=\mu Y'X$$

که باتوجه به (تقارنA) به‌دست می‌آید:

$$Y'AX=\mu Y'X$$

طبق (۱):

$$\lambda Y'X=\mu Y'X$$

پس:

$$\lambda Y'X-\mu Y'X=0$$
$$(\lambda-\mu)Y'X=0$$

چونکه $\lambda\neq\mu$ پس:

$$Y'X=0$$

یعنی X و Y برهم عمودند.

قضیه ـ برای هرماتریس ۲ × ۲ مانند A که دارای مقادیر ویژه متمایز است ماتریس V وجود دارد به قسمی که $AV=VD$ که‌درآن D یك ماتریس قطری است.

برهان ـ فرض کنیم λ_1 و λ_2 مقادیرویژه ماتریسA و $X=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ و $Y=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ بردارهای ویژه متناظر باآنها باشد دراینصورت داریم:

$$A\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix} \quad و \quad A\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\lambda_2\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$$

دورابطه بالا را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$A\begin{bmatrix}x_1 & 0\\y_1 & 0\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}x_1 & 0\\y_1 & 0\end{bmatrix} \quad و \quad A\begin{bmatrix}0 & x_2\\0 & y_2\end{bmatrix}=\lambda_2\begin{bmatrix}0 & x_2\\0 & y_2\end{bmatrix}$$

ازجمع دورابطه اخیر نتیجه می‌شود:

$$A\left(\begin{bmatrix}x_1 & 0\\y_1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & x_2\\0 & y_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\lambda_1 x_1 & 0\\\lambda_1 y_1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \lambda_2 x_2\\0 & \lambda_2 y_2\end{bmatrix}$$

یا

$$A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 & \lambda_2 y_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس طرف راست تساوی‌را به‌صورت حاصلضرب دو ماتریس می‌نویسیم:

$$A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

اگر فرض کنیم $V = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$ دراینصورت خواهیم داشت:

$$AV = VD \quad (1)$$

ضمناً ملاحظه می‌کنیدکه ستونهای ماتریس V بردارهای‌ویژه A و درایه‌های قطر اصلی D مقادیر ویژه متناظر با این بردارها هستند.

چون مقادیر ویژه ماتریس A مساوی نیستند بردارهای ویژه متناظر با آنها بریك امتداد نبوده و دراینصورت $\frac{x_1}{y_1} \neq \frac{x_2}{y_2}$ خواهد بود و درنتیجه خواهیم داشت، $x_1 y_2 - y_1 x_2 \neq 0$ یعنی $|V| \neq 0$ و V وارون پذیر است. پس‌اگر رابطه (۱) را از سمت چپ در V^{-1} ضرب کنیم نتیجه میشود:

$$V^{-1}AV = D \quad (2)$$

نتیجه: برای هر ماتریس متقارن ۲ × ۲ مانند A با دومقدار ویژه غیرمساوی ماتریس متعامد V وجود دارد به‌قسمی‌که $V'AV = D$. چرا؟

تبصره: فرض می‌کنیم بردارهای ویژه ماتریس متقارن A (ماتریس ۲ × ۲) عبارت باشنداز: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$؛ میدانیم این دو بردار برهم عمودند در محاسبه و عمل برای تعیین ماتریس V، طول بردارهای X و Y را بــه واحد تبدیل کرده، ستونهـای ماتریس V قرار میدهیم یعنی:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \\ \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} & \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad V = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} & \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} \\ \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} & \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} \end{bmatrix}$$

ملاحظه میشود که $VV' = I$ یعنی V متعامد است.

ماتریس شکل درجه دوم و مقاطع مخروطی: یك شکل درجه دوم همگن‌رابه‌صورت زیر تعریف میکنیم:

$$Q(x,y)=ax^2+2hxy+by^2$$

اما اگر $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix}a & h\\h & b\end{bmatrix}$، یك ماتریس متقارن باشد، آنگاه داریم:

$$X'AX=\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & h\\h & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$ (X' ترانهاده X است)

$$=\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ax+hy\\hx+by\end{bmatrix}$$

$$=ax^2+2hxy+by^2=Q(x,y)$$

ماتریس متقارن:

$$A=\begin{bmatrix}a & h\\h & b\end{bmatrix}$$

را بنام ماتریس شکل درجه دوم $Q(x,y)$ می‌خوانند ومی‌نویسند:

$$Q(x,y)=X'AX$$

از ماتریس $X'AX$ استفاده نموده معادلهٔ مقاطع مخروطی همگن (مرکز درمبدأ مختصات):

$$ax^2+2hxy+by^2=c$$

را به‌شکل زیر می‌نویسند:

$$X'AX=c \iff \begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & h\\h & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=c$$

تبدیل متعامد $X_1=V'X$ [1]

دیدیم که اگر V ماتریس‌متعامد باشد تبدیل:

$$X \longrightarrow X_1=V'X \quad (1)$$

که نقطهٔ (x,y) را روی (x_1,y_1) تصویر می‌نماید یك تبدیل متعامد است. اکنوندر شکل درجه دوم:

$$Q(x,y)=X'AX$$

۱ــ این تبدیل، درحقیقت دوران محورها به اندازه θ حول مبدأ مختصات است که برابر دوران $-\theta$ صفحه است.

بجای X و X' مقادیرشان را از (۱) قرار می‌دهیم:

$$Q_1(x_1,y_1)=(VX_1)'AVX_1$$
$$Q_1(x_1,y_1)=X'_1V'AVX_1$$

که $X'_1V'AVX_1$ خود شکل درجه‌دوم جدیدی با ماتریس $V'AV$ است، طبق نتیجه صفحه ۱۴۶ می‌توان ماتریس متعامد V را چنان انتخاب کرد که $V'AV$ یک ماتریس قطری باشد، $V'AV=D$ و درایه‌های قطر D مقادیر ویژهٔ A باشند:

$$V'AV=D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} \longrightarrow \text{یا } V'AV=D=\begin{bmatrix}\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}$$

این تبدیل، شکل درجه‌دوم را به‌صورت زیر بیرون می‌آورد:

$$Q_1(x_1,y_1)=X'_1V'AVX_1=X'_1DX_1=X'_1\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}X_1$$

$$=\begin{bmatrix}x_1 & y_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}$$

$$=\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2 \text{ یا } \lambda_2x_1^2+\lambda_1y_1^2$$

یعنی تبدیل خطی، $X_1=V'X$ ، شکل درجه‌دوم $Q(x,y)$ را به‌صورت جدید:

$$Q_1(x_1,y_1)=(\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2) \text{ یا } (\lambda_2x_1^2+\lambda_1y_1^2)$$

بیرون می‌آورد که در آن λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

نتیجه- تبدیل $X_1=V'X$ مقطع مخروطی $X'AX=c$ را به داخل یک مقطع مخروطی که محورهای اصلی آن همان محورهای مختصات جدید است تبدیل می‌کند.

$$X'AX=c \Longleftrightarrow ax^2+2hxy+by^2=c \xrightarrow{X_1} \lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2=c$$

یا

$$\lambda_2x_1^2+\lambda_1y_1^2=c$$

صورتهای $\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2=c$ را شکل استاندارد (استانده) مقاطع مخروطی می‌خوانند.

مثال- مقطع مخروطی $x^2-4xy-2y^2=3$ را با استفاده از تبدیل $X\to X_1=V'X$ به صورت استاندارد بنویسید.

حل- داریم:

$$Q(x,y)=x^2-4xy-2y^2$$

$$=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

دراینجا ماتریس A برابر است با:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

و معادله سرشتمای‌آن عبارتست:

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0 \Longleftrightarrow \lambda^2-(1-2)\lambda+(-2-4)=0$$

$$\lambda^2+\lambda-6=0 \Longleftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+3)=0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_1=2 \;،\; \lambda_2=-3$$

بنابـراین تبدیل $X \longrightarrow X_1=V'X$ معادلـهٔ مقطـع داده شده را بـه داخل مقطع $2x_1^2-3y_1^2=3$ یـا $-3x_1^2+2y_1^2=3$ — تبدیل می‌نماید که V ، باتوجه به‌بردارهای خاص λ_1 و λ_2 بصورت زیر به‌دست می‌آید:

$$AX=\lambda X$$

$$(A-\lambda I)X=\bar{o} \Longleftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\bar{o}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\bar{o}$$

ویا پس‌از ضرب و فاکتورگیری خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x-2y=0 & (1) \\ -2x+(-2-\lambda)y=0 \end{cases}$$

بازاء $\lambda=2$ معادله(۱) به‌صورت $y=-\frac{1}{2}x$ بیرون‌می‌آید که‌یکی‌از بردارهای‌ویژه‌آن بازای $x=-2$ عبارتست‌از $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و بازای $\lambda=-3$ همان معادله به‌صورت $y=2x$ بیرون می‌آید که یکی‌از بردارهای ویژه‌آن بازای $x=1$ برابر است‌با $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ که ازآنها، با تـوجه به‌قضیه صفحه

۱۴۶ **ماتریس V را تشکیل می‌دهیم:**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

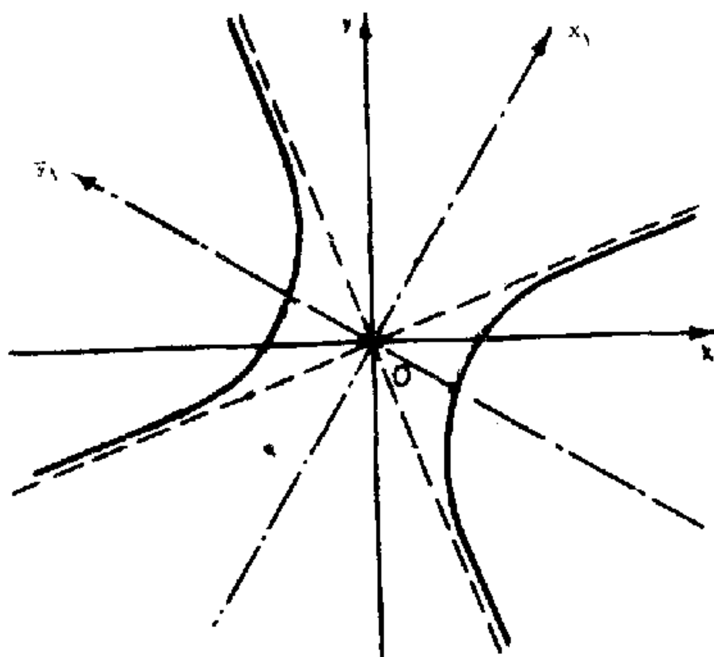
$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

و معادلات تبدیل عبارتند از:

$$X = VX_1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} y_1 \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_1 \end{cases} \quad (1)$$

اگر درمعادلهٔ $x^2 - 4xy - 2y^2 = 3$ بجای x و y مقادیرشان‌را قرار دهیم معادلهٔ $2y_1^2 - 3x_1^2 = 3$ به دست می‌آید.



ویا اگر تبدیل را بـه‌صورت $X \longrightarrow X_1 = V'X$ درنظر بگیریم به‌دستگاه معادلات زیر خواهیم رسید:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & +\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & +\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y \\ y_1 = \frac{-2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y \end{cases} \quad (1)$$

همانطورکه در شکل می‌بینید، دستگاه (۱) معادلات دوران محورها حول مبدأ مختصات و به اندازه $\theta = \text{Arc}\cos\frac{1}{\sqrt{5}}$ می‌باشد. بنابراین مقطع داده شده بـا دوران محورهـا به صورت، $2y_1^2 - 3x_1^2 = 3$ که یك هذلولی است و محورهای اصلی‌آن برمحورهای مختصات جدید منطبق است درمی‌آید (شکل صفحهٔ قبل).

شکل ماتریسی درجه دوم غیرهمگن: شکل درجه دوم غیرهمگن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q(x,y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c \qquad (1)$$

که شکل ماتریسی‌آن به‌صورت زیر است: (بجای‌عبارت $ax^2 + 2hxy + by^2$ شکل $X'AX$ نوشته شده‌است).

$$Q(x,y) = X'AX + BX + c \quad \text{و} \quad B = [2g \quad 2f] \qquad (2)$$

و $Q(x,y) = 0$ معادلهٔ مقاطع مخروطی غیرهمگن است (مرکزمقطع درمبدأ مختصات نیست).

مثال- مقطع‌زیررا به‌صورت استاندارد بیرون‌آورید.

$$x^2 - 4xy - 2y^2 + 6x - 4y + 3\frac{1}{3} = 0$$

حل - طبق (۲) خواهیم داشت: $B = [2g \quad 2f] = [6 \quad -4]$،

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 3\frac{1}{3} = 0$$

حال تبدیل $X_1 \longrightarrow X = VX_1$ را بکار برده و بجای $x^2 - 4xy - 2y^2$ بااستفاده از مقادیر ویژه $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$، یعنی λ_1 و λ_2، عبارت استانداردوآن‌را می‌نویسیم.

(باید توجه داشت که ماتریس دوران محورها عبارتست‌از: $\left(V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\right.$

$$2y_1^2-3x_1^2+\begin{bmatrix}6 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}+3\frac{1}{3}=0$$

$$2y_1^2-3x_1^2-\frac{16}{\sqrt{5}}y_1-\frac{2}{\sqrt{5}}x_1+3\frac{1}{3}=0$$

$$2(y_1-\frac{4}{\sqrt{5}})^2-3(x_1+\frac{1}{3\sqrt{5}})^2-3=0$$

و این یك‌هذلولی است.

تمرین

۱ ـ تبدیل مربع واحد راتحت ماتریس $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ به دست آورده، نتیجهٔ‌حاصل رابیان کنید.

۲ ـ هرگاه داشته باشیم : $\overrightarrow{oP}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{oQ}=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$ ، اولا تصویر $\overrightarrow{oP}$، $\overrightarrow{oQ}$ را تحت‌هریك ازماتریسهای زیربدست آورید:

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

ثانیاً تبدیل بردار $\overrightarrow{PQ}$ را تحت هریك از این ماتریسها به‌دست آورید.

۳ ـ مطلوبست تبدیل مثلث ABC ، که درآن $A(0,0)$ و $B(2,1)$ و $C(1,2)$، تحت

هریك ازماتریسهای زیر:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

۴ـ تبدیل‌مربع واحد راتحت هریك ازماتریسهای زیر بدست آورید:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۵ـ تبدیل زیررا،

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

که، $0 < k < 1$، برای‌دایره $x^2 + y^2 = 1$ به‌کاربرده نام‌منحنی حاصل رابیان‌کنید.

۶ـ تبدیل زیررا،

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

برای دایره $x^2 + y^2 = 1$ به‌کاربرید.

۷ـ هرگاه داشته‌باشیم، $P(1,1,1)$ و $Q(2,2,2)$ تبدیل پاره خط PQ را تحت هریك ازماتریسهای زیربه‌دست آورید:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۸ـ هرگاه P نقطه‌دلخواهی‌ازصفحه‌باشد، ماتریس A نقطهٔ Pرا روی P' تصویرمی‌نماید مطلوبست تعیین A درحالات‌زیر: الف‌ـ P' قرینه P نسبت به محور xها باشد، ب‌ـ P' قرینه P نسبت به خط $y = x$ باشد، ج‌ـ $\overrightarrow{oP'} = 3\overrightarrow{oP}$، د ـ زاویهٔ $P'oP$ برابر $90°$ باشد، ه ـ P' قرینه P نسبت به‌خط $x = a$ باشد، و ـ P' قرینه P نسبت به خط $y = 3x$ باشد، ز ـ P' قرینه P نسبت به‌خط $2y + 3x + 1 = 0$ باشد.

۹- $\overrightarrow{oP}$ برداری است که تحت ماتریس، $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ ، باندازه α درجه

در جهت مثبت حول مبدأ دوران می‌نماید. ماتریسی بنویسید که $\overrightarrow{oP}$ را باندازه β - (جهت منفی) حول o دوران بدهد. ازآنجا ماتریس $\beta - \alpha$ را نوشته دو رابطهٔ زیر را نتیجه بگیرید:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

۱۰- نشان دهید که:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{2} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

و از آنجا $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را برحسب $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ حساب کنید. آیا با این روش می‌توان $\cos 3\alpha$ و $\sin 3\alpha$ را حساب کرد؟

۱۱- با استفاده از تبدیلات متوالی، بدون عمل ضرب، حاصل‌های زیر را بنویسید:

الف - $\begin{bmatrix} \cos 15^\circ & -\sin 15^\circ \\ \sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos 75^\circ & -\sin 75^\circ \\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{bmatrix}$

ب - $\begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix}$

ج - $\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}^{20}$

د - $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{6}$

۱۲- تبدیل‌مربع واحد را تحت ماتریس $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، که در آن $ad - bc > 0$

بدست آورده ثابت کنید اندازهٔ مساحت شکل تبدیل یافته برابر $|M|$ است.

۱۳ــ با استفاده از دوماتریس دوران وماتریس تقارن درمحورxها (ترکیب تبدیلات)، ماتریس تقارن نسبت به خط $y=x\,tg\alpha$ را بدست آورید.

۱۴ــ با استفاده از ترکیب تبدیلات، ماتریس تقارن نسبت به خط $y=x\,tg\alpha+c$ را به‌دست آورید.

۱۵ــ ثابت کنید ماتریس حاصل از تقارن نسبت به محور x ها و سپس نسبت به خط $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$، برابر است با ماتریس دوران حول مبدأ باندازه زاویه $60°$.

۱۶ــ ماتریس دوران حول مبدأ و در جهت مثبت دوران عبارتست، $T=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

تبدیل نقطه $P\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}$، را تحت T وبه‌دنبال آن تحت $T_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ به دست می‌آوریم. اولا نشان دهید که نتیجه این دو تبدیل متوالی، تقارن نقطهٔ P نسبت به‌خط $y+x=0$ می‌باشد. ثانیاً تأثیر این دو تبدیل را روی خط $y-3x-2=0$ تعیین کنید. (معادلهٔ جدید خط را بنویسید).

۱۷ــ هرگاه، $M_\alpha=\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & +\sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{bmatrix}$ و $M_\beta=\begin{bmatrix}\cos 2\beta & \sin 2\beta\\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta\end{bmatrix}$

ماتریسهای تقارن نسبت بـه خطوط $y=x\,tg\alpha$ و $y=x\,tg\beta$ باشند. نشان دهید که $M_\beta M_\alpha$ یك ماتریس دوران حول نقطهO خواهد بود که زاویه دوران را حساب خواهید کرد. رابطه‌ای بین α و β پیدا کنید به قسمی که $M_\beta M_\alpha=M_\alpha M_\beta$.

۱۸ــ ثابت کنید که اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، متعامد باشد دو خط زیر برهم عمودند:

$$\begin{cases}ax+by=0\\ cx+dy=0\end{cases}$$

۱۹ــ هرگاه A یك ماتریس ضدمتقارن بوده و ماتریسهای $I-A$ و $(I+A)^{-1}$ وارون پذیر باشند، ثابت کنید ماتریس: $B=(I-A)(I+A)^{-1}$ یك‌ماتریس‌متعامداست. ماتریس B را وقتی که 2×2 و $A=\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}$است به‌دست آورید.

۲۰ـ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریسهای زیر را درصورت وجود حساب کنید:

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix};\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix};\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix};\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix};\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$$

۲۱ـ ثابت کنید که همهٔ مقادیر ویژه یك ماتریس وارون‌پذیر مخالف صفر است.

۲۲ـ هرگاه A یك ماتریس مربع و وارون‌پذیر باشد، چه ارتباطی بین مقادیر ویژه A و $A^{-۱}$ وجود دارد.

۲۳ـ یکی ازمقادیر خاص ماتریس:

$$A=\begin{bmatrix} ۱۱ & -۶ & ۲ \\ -۶ & ۱۰ & -۴ \\ ۲ & -۴ & ۶ \end{bmatrix}$$

برابر ۱۸ است. مقادیر دیگررا پیداکنید.

۲۴ـ مقادیرخاص هریك ازماتریسهای زیررا پیداکنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix};B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

۲۵ـ هریك از شکلهای درجه دوم‌زیررا بصورت ماتریسی بنویسید:

الف) $x^۲-۲y^۲+۴xy$ ، ب) $۴x^۲+۲y^۲-۸xy$ ، ج) $-۲x^۲-۴xy$

۲۶ـ مطلوبست محاسبه $X'AX$ برای حالات زیر:

الف ـ $A=\begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}$ و $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، ب ـ $A=\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$ و $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

۲۷ـ شکلهای درجه دوم هریك‌از ماتریسهای زیررا بنویسید:

الف ـ $\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ ب ـ $\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ۵ & -۳ & -۲ \\ -۳ & ۳ & -۱ \\ -۲ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۲۸ـ اـ تبدیلهایی متعامد پیدا کنید (درصورت‌وجود) که هریك از شکلهای درجه دوم را بصورت استاندارد $ax^۲+by^۲$، بیرون آورد:

الف ـ $۳x^۲+۶xy-۵y^۲$ ب ـ $۵x^۲+۶xy-۳y^۲$ ج ـ $x^۲+۲xy+y^۲$

د ـ $4x^2+8xy+9y^2+x-2y+5$ ـ ه $7x^2+12xy+2y^2$

II ـ صورت استاندارد هریك ازاین‌شکلهای درجه دوم رابنویسید.

۲۹ ـ I ـ یك‌تبدیل متعامد پیدا کنید(درصورت‌وجود) که هریك ازمقاطع‌زیررا به‌صورت استاندارد بیرون‌آورد:

الف ـ $9xy-1=0$ ب ـ $4x^2+2xy+4y^2+2x+2y-11=0$

ج ـ $2x^2+4xy+5y^2=1$ د ـ $2x^2+2y^2+6xy-2x-2y-1=0$

II ـ صورت استاندارد هریك ازاین مقاطع را بنویسید.

۳۰ ـ اگر U یك ماتریس متعامد باشد نشان دهید احکام زیر هم‌ارزند.

الف ـ U متقارن است. ب ـ $U^2=I$.

۳۱ ـ اگر یك ماتریس متعامد مثلثی باشد ثابت‌کنید این ماتریس قطری است و همه درایه‌های قطرش ± 1 هستند.

۳۲ ـ اگر A متعامد و I_n+A وارون‌پذیر باشد نشان دهید:

$$(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$$

پاد متقارن است.

۳۳ ـ ثابت‌کنید هرماتریس متقارن ۲ × ۲ که تفاضل اعداد روی قطر اصلی‌آن یا یکی از اعداد خارج ازقطر مخالف صفر باشد دارای دومقدار ویژه است.

۳۴ ـ ثابت‌کنید که ماتریس مرتبه ۲، A درمعادلهٔ سرشتنمائی خود صدق می‌کند.

۳۵ ـ تحقیق کنید ماتریس $A=\frac{1}{1+2a^2}\begin{bmatrix} 1 & -2a & 2a^2 \\ 2a & 1-2a^2 & -2a \\ 2a^2 & 2a & 1 \end{bmatrix}$ متعامد است.

۳۶ ـ اگر $A^2=A$ و $(A-A')^2=\bar{o}$ ثابت‌کنید:

الف ـ $AA'+A'A=A+A'$ ب ـ $(AA')^2=AA'$

۳۷ ـ اگر X و Y دو ماتریس مربعی باشد و داشته باشیم $X+Y=XY$ ثابت‌کنید اگر X وارون‌پذیر باشد Y نیز وارون‌پذیر است و $X^{-1}+Y^{-1}=I$.

مسائل تکمیلی و گزیده‌ای ازمسائل امتحانات نهایی سراسر کشور

الف ـ مسائل مربوط به فصل اول

۱ـ اگر p متغیر گزاره‌ای وارزش‌آن‌را به $v(p)$ نشان‌دهیم و قرارداد کنیم که اگر p درست باشدآنگاه $v(p)=۱$ واگرنادرست باشد $v(p)=۰$ ثابت‌کنید:

الف - $v(p)+v(\sim p)=۱$

ب - $v(p\wedge q)=v(p).v(q)$

ج - $v(p\vee q)=v(p)+v(q)-v(p)v(q)$

د - $v(p\Longrightarrow q)=۱-v(p)+v(p).v(q)$

ه - $v(p\Longleftrightarrow q)=۱-v(p)-v(q)+۲v(p).v(q)$

۲ـ نتیجه استنتاج زیررا تعیین‌کنید.

تیم A برنده می‌شود یا تیم B برنده می‌شود.

اگر A برنده‌است‌آنگاه داور بد قضاوت‌کرده‌است.

اگرداوربد قضاوت‌کرده‌است،آنگاه هوا روشن نبوده‌است.

هوا روشن بوده‌است.

برنده‌کی است؟

۳ـآیا بحث زیرمعتبراست؟ (قوانینی راکه ازآن استفاده می‌کنید نام ببرید)شهریورماه۶۲

اگرقوانین سخت وخشن باشند، مردم بیرحم وسفاك می‌شوند.

اگرمردم بیرحم‌وسفاك شوند، ازاندیشه‌های خوب محروم می‌شوند.

مردم ازاندیشه‌های خوب محروم نمی‌شوند یا وحدت خودرا ازدست می‌دهند.

اگرمردم به‌اسارت‌کشیده نشوند، وحدت خود را ازدست نمی‌دهند.

∴ اگرقوانین سخت وخشن باشند، مردم به‌اسارت‌کشیده می‌شوند.

۴ـ بدون رسم جدول ثابت‌کنیدگزاره زیر استلزام منطقی‌است (همیشه درست است)

خردادماه ۶۳

$$[(p\vee q)\wedge\sim p]\Longrightarrow q$$

۵ـآیا بحث زیرمعتبراست؟ (چرا؟) خردادماه ۶۳

حسین به‌اکبر یا به‌مسعود رأی‌میدهد.

اگرحسین عقیدهٔ محمد را بپذیرد به مسعود رأی نمیدهد.

اگرحسین به‌اکبررأی دهد مسعود انتخاب نمی‌شود.

∴ پس حسین عقیده محمد را نمی‌پذیرد یا مسعود انتخاب نمی‌شود.

۶ـ ثابت کنید گزارهٔ زیر یك قضیهٔ دوشرطی است. شهریورماه ۶۳

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q$$

۷ـ ثابت کنید استنتاج زیر معتبر است. خردادماه ۶۴

$(r \Rightarrow \sim p) \wedge$ (شرط کافی برای q آن است که S) $\wedge$ (شرط لازم برای $\sim r$ آن است که $\sim q$) $\wedge S \;|\!\!\text{———}\; \sim p$

۸ـ ثابت کنید که گزارهٔ زیر قضیهٔ دوشرطی است. شهریورماه ۶۴

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Leftrightarrow \sim p$$

۹ـ ثابت کنید استنتاج زیر معتبر است. شهریورماه ۶۴

$$\begin{cases} (p_1 \wedge p_2) \Rightarrow p_3 \\ (\sim p_2 \vee p_3) \Rightarrow p_4 \\ p_1 \end{cases} \;\Bigg|\text{———} \; p_4$$

۱۰ـ بدون استفاده ازجدول ثابت کنید گزارهٔ زیر همیشه درست است. خردادماه ۶۶

$$(p \wedge \sim s) \vee (p \wedge s) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow (p \wedge \sim q))$$

۱۱ـ معتبر بودن استنتاج زیر را بررسی کنید (نام قانونی را که به کار می برید بنویسید). خردادماه ۶۶

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \wedge \sim r \;\text{——}\; \sim p$$

ب ـ مسائل مربوط به فصل دوم

۱۲ـ ثابت کنید اگر a عددی صحیح و a و p نسبت بههم اول باشند آنگاه در حلقهٔ (Z_p و $\oplus$ و $\otimes$) عضو $[a]$ وارون پذیر است. خردادماه ۶۳

۱۳ـ درمیدان (Z_{11} و $\oplus$ و $\otimes$) عمل $\otimes$ بهصورت $[a]\otimes[b]=[ab]$ تعریف شده عضو متقابل $[20]$ رانسبت بهعمل $\otimes$ پیدا کنید. خردادماه ۶۴

۱۴ـ هرگاه (G و $+$) یك گروه باشد و $S \subseteq G$ و $S \neq \varnothing$ ثابت کنید اگر برای هر a و b در S، $a-b \in S$ آنگاه S زیرگروه، گروه G میباشد. شهریورماه ۶۴

۱۵ـ بافرض اینکه مجموعه $Q\sqrt{3}=\{a+b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}$ همراه با اعمال جمع و ضرب معمولی میدان باشد عضومتقابل هرعضو مجموعه $Q\sqrt{3}-\{0\}$ را نسبت بهعمل ضرب پیدا کنید. خردادماه ۶۵

۱۶ـ اگر H و W زیرحلقههای حلقهٔ R باشند ثابت کنید $H \cap W$ نیز زیر حلقه، حلقهٔ R میباشد. شهریورماه ۶۵

۱۷ـ درصورتیکه R مجموعه اعداد حقیقی و Z مجموعه اعداد درست و

$W=\{\text{۵}a+b|a\in Z \text{ و } b\in R\}$ تحقیق کنیدآیا (× و + و W) یك حلقه است یا خیر؟ چرا؟
شهریورماه ۶۶

ج ـ مسائل مربوط به‌فصل سوم

۱۸ـ باروش استقراء ثابت کنید: (n عدد طبیعی است)

الف ـ $\text{۱}+\frac{\text{۱}}{\text{۴}}+\frac{\text{۱}}{\text{۹}}+\ldots+\frac{\text{۱}}{n^{\text{۲}}}\leqslant \text{۲}-\frac{\text{۱}}{n}$

ب ـ $\cos\alpha+\cos\text{۳}\alpha+\ldots+\cos(\text{۲}n-\text{۱})\alpha=\frac{\sin\text{۲}n\alpha}{\text{۲}\sin\alpha}$

۱۹ـ با استقراء ثابت کنید مشتق مرتبه nام ، $\sin x$ برابراست:

$$y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{\text{۲}}\right)$$

۲۰ـ بااستقراء ثابت کنید مشتق مرتبه nام ، $y=\frac{ax+b}{\text{۱}-x}$ برابراست:

$$y^{(n)}=\frac{(a+b)n!}{(\text{۱}-x)^{n+\text{۱}}}$$

۲۱ـ با استقراء ثابت کنید: (n عدد طبیعی‌است).

$$\text{۲}!\times\text{۴}!\times\ldots\times(\text{۲}n)!\geqslant[(n+\text{۱})!]^{n}$$

۲۲ـ هرگاه $A=\begin{bmatrix}\text{۱} & -\text{۲} & -\text{۳}\\ -\text{۱} & \text{۲} & \text{۳}\\ \text{۱} & -\text{۲} & -\text{۳}\end{bmatrix}$ ثابت کنید $A^{\text{۲}}=\overline{O}$ و ازآنجا به استقراء ثابت کنید :

$$(I+A)^{n+\text{۱}}=(n+\text{۱})A+I$$

۲۳ـ به‌کمك استقراء ثابت کنید:

$$\text{۳}+\text{۳}^{\text{۲}}+\text{۳}^{\text{۳}}+\ldots+\text{۳}^{n}=\frac{\text{۳}}{\text{۲}}(\text{۳}^{n}-\text{۱})$$

۲۴ـ با استقراء ثابت کنید مشتق مرتبهٔ nام ، x^{n} برابر $n!$ است.

۲۵ـ با استفاده ازاستقراو ریاضی ثابت کنیدکه به‌ازاء هرعدد طبیعی n شهریورماه ۶۳

$$\text{۱}+\sum_{i=\text{۱}}^{n} i(i!)=(n+\text{۱})!$$

۲۶ـ با استفاده ازروش استقراء ثابت کنید برای تمام مقادیرطبیعی $n\geqslant\text{۲}$ داریم.

$$\sum_{i=\text{۱}}^{n}\frac{\text{۱}}{\sqrt{i}}>\sqrt{n}$$

خردادماه ۶۴

۲۷- با استفاده ازروش استقراء ثابت کنید بازای تمام مقادیر $n\in N$ داریم. شهریورماه ۶۵

$$9^{n+1} - 8n - 9 \overset{(64)}{\equiv} 0$$

۲۸- اولاً ثابت کنید برای هرعدد طبیعی n ، $3|4^n+5$ خردادماه ۶۶

ثانیاً با استفاده از استقراء ثابت کنید: $a = 2\times 4^{2n} - 4^n - 1$ بر ۹ بخش پذیر است.

۲۹- با استفاده ازاستقراء ثابت کنید برای هرعدد طبیعی n: شهریورماه ۶۶

$$\frac{1}{2\times 5}+\frac{1}{5\times 8}+\frac{1}{8\times 11}+\dots+\frac{1}{(3n-1)\times(3n+2)}=\frac{n}{2(3n+2)}$$

۳۰- اگر $n\in N$ ثابت کنید:

الف - $3^{105n+2}\times 2^{2n+2}\times 20^{2n}+3\equiv 0$ (پیمانه ۱۳)

ب - $7^{6n+2}+7^{3n+1}+1\equiv 0$ (پیمانه ۱۹)

ج - $2^{5n+3}+5^n\times 3^{n+2}\equiv 0$ (پیمانه ۱۷)

د - $8^n+9^n-17^n\equiv 0$ (پیمانه ۷۲)

هـ - $2^{2n}+6^n-1\equiv 0$ (پیمانه ۹)

ی - a فرد است $a^{2k-1}\equiv 1$ (پیمانه 2^k)

و - $7^{2n}+7^{2n+2}\equiv 0$ (پیمانه ۵۰)

۳۱- مطلوبست جمیع اعداد اول p که به ازاء آنها $16p+1$ مجذور کامل یکعدد طبیعی باشد.

۳۲- ثابت کنید بـه‌ازاء هرعدد صحیح مفروض k عدد صحیح مانند n وجود دارد که $5|n^3+k$.

۳۳- اگر a و b دوعدد درست و p عدد اول باشد.

$$(a+b)^p\equiv a^p+b^p \text{ (پیمانه } p)$$

۳۴- ثابت کنید اگر k فرد باشد $19^{2k}+11^{2k}$ بر ۲۴۱ بخش‌پذیر است.

۳۵- رقم یکان عدد $4n^3-n$ را تعیین کنید.

۳۶- اگر n مضرب ۳ نباشدآنگاه $31|5^{2n}+5^n+1$

۳۷- ثابت کنید a^p و a^{p+4} رقم یکان مشترك دارند.

۳۸- ثابت کنید $13^n+7^n+19^n$ بر ۳۹ بخش‌پذیراست (n فرد است).

۳۹- رقم سمت راست $1^n+2^n+3^n+4^n$ چیست؟

۴۰- ثابت کنید $b^{a-1}+a^{b-1}\equiv 1$ (پیمانه ab) (a و b اول‌هستند).

۴۱- ثابت کنید $a^p+b^p\equiv 0$ (پیمانه p) $\Longrightarrow a^p+b^p\equiv 0$ (پیمانه p^2) (p اول و فرد است).

۴۲- عدد صحیح n را چنان تعیین کنید که $2n+13$ بر $n-1$ بخش‌پذیر باشد.

۴۳- عدد صحیح و مثبت n را چنان تعیین کنید که مجموع ارقام عدد $10^{2n}-10^{n}$ برابر ۲۳۴ باشد.

۴۴- اگر $n\neq 3K$ ثابت کنید $3^{2n}+3^{n}+1\equiv 0$ (پیمانه ۱۳)

۴۵- مطلوبست تعیین دو عدد صحیح و مثبت که مجموعشان مساوی ۱۶۰ و کوچکترین مضرب مشترکشان ۶۲ برابر بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان باشد. شهریورماه ۶۲

۴۶- اگر n عددی صحیح و بزرگتر یا مساوی صفر باشد ثابت کنید: شهریورماه ۶۲

$3^{6n+2}+3^{3n+1}+1\equiv 0$ (پیمانه ۱۳)

۴۷- مطلوبست تعیین دو عدد صحیح و مثبت که مجموعشان ۲۸۵ و کوچکترین مضرب مشترکشان ۱۰۵۰ باشد. خردادماه ۶۳

۴۸- ثابت کنید (پیمانه ۱۳) $5^{6n+4}+5^{3n+2}+1\equiv 0$ خردادماه ۶۳

۴۹- ثابت کنید به‌ازاء هرعدد طبیعی و یا صحیح n عبارت $6n+5$ و $12n^2+16n+6$ نسبت بهم اولند. شهریورماه۶۳

۵۰- نسبت دوعدد صحیح و مثبت برابر $\frac{5}{6}$ است و میدانیم تفاضل حاصلضرب آنها از کوچکترین مضرب مشترک آن دوبرابر ۴۹۶۰ می‌باشدآن دوعدد را محاسبه کنید. شهریورماه۶۳

۵۱- ثابت کنید (پیمانه ۱۷) $3^{4n+4}-4^{3n+3}\equiv 0$ (n عدد طبیعی است) شهریورماه۶۳

۵۲- تحقیق کنید (پیمانه ۶۲) $160^{n}+96^{n}-3^{n}-5^{n}\equiv 0$ $(n\in N)$ خردادماه۶۴

۵۳- ثابت کنید (پیمانه ۴۳) $6^{2n-1}+7\equiv 0$ $(n\in N)$ شهریورماه۶۴

۵۴- $b\in N$ و a و $(a , b)=14$ ودرتعیین بزرگترین شمارنده مشترک بوسیلهٔ تقسیمات متوالی سلسله خارج قسمتها به‌ترتیب ۳ و ۸ و ۲ و ۴ شده a و b را پیدا کنید.

شهریورماه ۶۴

۵۵- اگر باقیمانده‌های تقسیم عدد صحیح a بر ۸ و ۷ بترتیب ۵ و ۳ باشند باقیمانده تقسیم عدد a را بر ۵۶ پیدا کنید. خردادماه۶۵

۵۶- اولا ثابت کنید مربع هرعدد فرد مضرب ۸ به اضافه ۱ است ثانیاً ثابت کنید $(n^2-1)(n^2+2n)$ به‌ازاء تمام مقادیرصحیح n بر ۸ قابل قسمت است. خردادماه ۶۵

۵۷- اگردوعدد a و $b\in N$ هردو زوج یا هردو فرد باشند ثابت کنید $10^{a}-10^{b}$ بر ۱۱ بخش‌پذیر می‌شود. شهریورماه۶۵

۵۸- دوعدد ۸۳ و ۱۰۷ را برعدد طبیعی b تقسیم کرده‌ایم باقیمانده‌ها به‌ترتیب ۵ و ۳ شده عدد b را پیدا کنید. شهریورماه۶۵

۵۹- ثابت‌کنید دوعدد $2n+1$ و $2n^2+2n+1$ به‌ازاء جمیع مقادیر n نسبت بهم اولند.
خردادماه ۶۶

۶۰- درصورتیکه $[a , b]=m$ و $1<(a , b)=d<10$ و $m-d=33$ مطلوبست اعداد طبیعی a و b.
شهریورماه ۶۶

۶۱- باقیمانده تقسیم عدد $A=2^{2(18n+1)}+10^{n+1}+4$ را بر ۹ پیدا کنید $(n\in N)$
شهریورماه ۶۶

د ـ مسائل مربوط بفصل چهارم

۶۲- هرگاه A و X ماتریس و λ عدد حقیقی باشد باستقراء ثابت‌کنید.

$$AX=\lambda X \Longrightarrow A^nX=\lambda^nX$$

۶۳- هرگاه $A=\begin{bmatrix}\lambda u & u^2\\ -\lambda^2 & -\lambda u\end{bmatrix}$ باشد ثابت‌کنید: $A^2=\bar{o}$

۶۴- هرگاه X ماتریسی غیرصفر باشد درتساوی زیر X را پیداکنید:

$$\begin{bmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

۶۵- هرگاه A یك ماتریس باشد با استفاده از استقراء و $A^2=A$ ثابت‌کنید:

$$(I+A)^n=I+(2^n-1)A$$

۶۶- هرگاه $X=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ و $Y=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}b & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}b\end{bmatrix}$ و Z دررابطه‌های $ZX=Y$ و $XYZ=I$ صدق کند مقدار b را حساب‌کنید.

۶۷- هرگاه $A=\begin{bmatrix}4 & c & -b\\ -c & 4 & a\\ b & -a & 4\end{bmatrix}$، ترکیبی از A و I بنویسیدکه ماتریس حاصل پادمتقارن (ضدمتقارن) باشد.

۶۸- ماتریس مربعی مرتبه ۲، A دارای خواص زیراست:

$$A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix} \text{ و } A\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}$$

ثابت کنید $A=VU^{-1}$ که درآن $u=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ و $V=\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$

۶۹- بدون بسط ثابت کنید.

الف - $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos 2\alpha \\ \cos\alpha & \cos 2\alpha & \cos 3\alpha \\ \cos 2\alpha & \cos 3\alpha & \cos 4\alpha \end{vmatrix} = 0$ ب - $\begin{vmatrix} 1 & \log x & \log yz \\ 1 & \log y & \log xz \\ 1 & \log z & \log xy \end{vmatrix} = 0$

۷۰- بدون بسط ثابت کنید.

الف - $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$

ب - $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz$

۷۱- بدون بسط مقدار دترمینان زیررا حساب کنید. (کنکورتشریحی۶۲)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

۷۲- ثابت کنید اگر A و B ماتریسهای مرتبه n و هردو متقارن یا هردو ضد متقارن و تعویض‌پذیر باشندآنگاه AB متقارن است.

۷۳- هرگاه $B=rA+SI$ و A و B معکوس پذیر باشند ثابت کنید:

$$A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

۷۴- هرگاه B ماتریس وارون‌پذیر بوده وداشته باشیم $Q=BAB^{-1}$ با استقراء ثابت کنید $Q^n=BA^nB^{-1}$.

۷۵- اگرداشته باشیم $\sum_{k=1}^{n}(ak+b)=L$ مطلوبست محاسبهٔ $\sum_{k=1}^{n}k$ برحسب a وb وL.

۷۶- هرگاه $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$، اولاً α و β را طوری تعیین کنید که داشته باشیم

$$A^2=\alpha A+\beta I_2$$

ثانیاً با استفاده ازآن وبدون استفاده از ماتریس الحاقی A^{-1} را حساب کنید.

۷۷- اگر λ_1 یك مقدار ویژه ماتریس مرتبه ۲ ، A باشد ثابت‌کنید $\frac{|A|}{\lambda_1}$ مقدار ویژه دیگر آن است. $(\lambda_1 \neq 0)$

۷۸- هرگاه V یك ماتریس‌متعامد و D یك ماتریس‌قطری باشد وداشته باشیم $AV = VD$ ثابت‌کنید A یك ماتریس متقارن است.

۷۹- هرگاه A یك ماتریس و $A^n = 0$ ثابت‌کنید ماتریس $A + I$ وارون پذیراست.

۸۰- ثابت‌کنید اگر A ماتریس ضد متقارن با مرتبه فرد باشدآنگاه $|A| = 0$.

۸۱- هرگاه ماتریس A در معادلهٔ: $\alpha A^2 + \beta A + \gamma I = \bar{0}$ صدق‌کند $\gamma \neq 0$ وارون A را محاسبه‌کنید.

۸۲- هرگاه $A^2 = A$ (A ماتریس است) ثابت‌کنید $|A| = 0$ $(|A| \neq 1)$.

۸۳- هرگاه N' ماتریس الحاقی وابسته به‌ماتریس A باشد ثابت‌کنید

$|N'| = (|A|)^{n-1}$

۸۴- اگر A و B دو ماتریس مربع مرتبه n باشد آیا هر مقدار ویژه AB یك مقدار ویژه BA است؟ آیا هر بردار ویژه AB یك بردار ویژه BA است؟

۸۵- فرض‌کنید $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ و اعداد c و d وجود داشته باشدکه به ازاء هر i و j، $a_{ij} = ic + jd$ (مثلاً اگر $n = 2$ $A = \begin{bmatrix} c+d & c+2d \\ 2c+d & 2c+2d \end{bmatrix}$) اگر $n > 2$ ثابت کنید $|A| = 0$

۸۶- اگر $A^2 = A$ و $\lambda \neq 1$ ثابت‌کنید $I_n - \lambda A$ وارون‌پذیراست وداریم:

$$(I_n - \lambda A)^{-1} = I_n + \frac{\lambda}{1-\lambda} A$$

دردوحالت حل‌کنید. الف - $|A| \neq 0$ ب - درحالت‌کلی.

۸۷- فرض‌کنید A و B دو ماتریس مرتبه n باشند ثابت‌کنید $I - AB$ وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر $I - BA$ وارون‌پذیر باشد. دردوحالت حل‌کنید الف - $|B| \neq 0$ ب - در حالت‌کلی.

۸۸- اگر A، پوچ توان باشد $(A^n = \bar{0})$ ثابت‌کنید $|A| = 0$.

۸۹- اگر A ماتریس متقارن معکوس‌پذیر و B ماتریس‌ضد متقارن و $(A + B)(A - B)$. معکوس‌پذیرباشد ثابت‌کنیداگر $M = (A + B)^{-1}(A - B)$ آنگاه $A = M'AM$.

۹۰- الف - اگر A' قرینهٔ‌نقطه $A(1و3)$ نسبت به‌خط $y = -3x$ باشد ماتریس تقارن

نسبت به این خط را بنویسید و مختصات A' را تعیین کنید.

ب- اگر B' دوران یافته $B(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ حول مبدأ مختصات تحت زاویهٔ ۴۵ باشد ماتریس دوران‌را نوشته مختصات B' را بیابید.

ج - اگر C' مجانس $C(1, -2)$ نسبت به مبدأ مختصات و با نسبت تجانس k باشد ماتریس تجانس را بنویسید و مختصات C' را بیابید. شهریورماه ۶۲

۹۱- یك ماتریس تعامد بدست‌آورید که مقطع مخروطی به معادلهٔ:

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 - 16\sqrt{2}x - 32 = 0$$

را به‌صورت استاندارد درآورد. صورت استاندارد راهم بنویسید. شهریورماه ۶۲

۹۲- با استفاده ازخواص دترمینان(بدون بسط طرفین)ثابت کنید تساوی زیر برقراراست.

خردادماه ۶۳

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & c & a+b+c \\ 1 & a+b+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c \\ 1 & a+b & 0 \end{vmatrix}$$

۹۳- به‌نقطه $A(3, 2)$ ابتدا انتقالی به اندازه $\overrightarrow{op} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$ داده و پس‌ازآن قرینه نقطه انتقال یافته را نسبت به‌خط $y = x + 2$ بدست می‌آوریم با استفاده از ماتریس ترکیبهای متوالی ماتریس این دوتبدیل را بدست‌آورید. خردادماه ۶۳

۹۴- دستگاه زیر را به‌کمك ماتریس وارون حل‌کنید.

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 6 \end{cases}$$

خرادماه ۶۳

۹۵- یك تبدیل تعامدی تعیین‌کنیدکه مقطع مخروطی

$$7x^2 - 12xy - 2y^2 + x + 2y - 5 = 0$$

رابه‌صورت استاندارد بیرون‌آورد وشکل استانداردآنرا نیز بدست‌آورید (یك تبدیل کافی است)

خردادماه ۶۳

۹۶- با استفاده ازخواص دترمینان ثابت‌کنید تساوی زیر برقراراست. شهریورماه ۶۳

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \quad (a \neq b \neq c \neq a)$$

۹۷- نقطه M(۶و۵) را حول نقطه A(۴و۳) باندازهٔ ۹۰° دوران میدهیم تا بوضع M′ درآید ماتریس این تبدیل ومختصات نقطهٔ M′ را بدست‌آورید. شهریورماه ۶۳

۹۸- اگر A′ قرینه نقطه A(۳و۱) نسبت به‌خط $y=2x$ و A″ قرینه A′ نسبت به خط $y=1$ باشند اولاً ماتریسی‌پیداکنیدکه A را به A″ تبدیل‌کند ثانیاً بااستفاده‌ازآن‌مختصات A″ را پیداکنید. خردادماه ۶۴

۹۹- یك تبدیل متعامد پیداکنیدکه مقطع مخروطی به‌معادله:

$$x^2+4xy-2y^2-2x-2y=1$$

را به‌صورت استاندارد بیرون‌آورد. (نوشتن صورت استاندارد لازم نیست) خردادماه ۶۴

۱۰۰- با استفاده ازقوانین دترمینان‌و دترمینان ماتریس‌بالا مثلثی بدون بسط دترمینان صحت تساوی زیررا ثابت‌کنید. خردادماه ۶۴

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

۱۰۱- با استفاده ازماتریس تقارن نسبت به‌خط $y=mx+c$ قرینه نقطه M(۲و۱) را نسبت به‌خط $y=2x+3$ پیداکنید. شهریورماه ۶۴

۱۰۲- با استفاده ازقوانین دترمینان ودترمینان‌بالا مثلثی‌بدون بسط دترمینان صحت‌تساوی زیررا ثابت‌کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

۱۰۳- اگر B ماتریس معکوس‌پذیر باشد ثابت‌کنید. $|B^{-1}AB-\lambda I| = |A-\lambda I|$
(I ماتریس واحد است) خردادماه ۶۵

۱۰۴- دترمینان طرف اول تساوی را با استفاده ازقوانین وبسط دترمینان‌آنقدر ساده‌کنید تا طرف دوم بدست‌آید. خردادماه ۶۵

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a' & b' \\ 0 & -1 & c' & d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{vmatrix}$$

۱۰۵- صورت استاندارد مقطع مخروطی به‌معادله $2x^2+8xy+2y^2-y=10$ را پیداکنید. شهریورماه ۶۵

۱۰۶- با استفاده ازخواص دترمینان و دترمینان بالامثلثی صحت تساوی زیراتحقیق کنید.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱+a & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱+b & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱+c \end{vmatrix} = abc$$

۱۰۷- ازمعادله $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۱ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر x و y و z را پیداکنید.

شهریورماه ۶۵

۱۰۸- اگر نقطهٔ M' قرینه نقطه $M(۱و۲)$ نسبت بـه خط $y=۲x$ ونقطه M'' دوران یافتهٔ M' به‌اندازه ۹۰° باشد مختصات نقطه M'' را پیداکنید. شهریورماه ۶۵

۱۰۹- بدون بسط و با استفاده ازویژگیهای دترمینانها ثابت کنید. خردادماه ۶۶

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱+a & a^۲(b+c) \\ ۱ & ۱+b & b^۲(a+c) \\ ۱ & ۱+c & c^۲(a+b) \end{vmatrix} = ۰$$

۱۱۰- اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر از مرتبه n و $AB=BA$ و $A^۲=A$ و $B^۲=B$ و $k\neq -۱$ اولاً ثابت کنید ماتریس $W=I_n+kAB$ وارون‌پذیر است.

ثانیاً ثابت کنید $W^{-۱}=I_n-\frac{k}{k+۱}AB$ خردادماه ۶۶

۱۱۱- اولاً شکل درجه دوم $۴x^۲+۶xy$ را به‌صورت ماتریس نمایش دهید.

ثانیاً صورت استانداردآنرا بنویسید. خردادماه ۶۶

۱۱۲- درصورتیکـه اعـداد دورقمی $\overline{ab}$ و $\overline{cd}$ برعدد ۷ بخش‌پذیر بـاشد با استفاده از ویژگیهای دترمینان‌ثابت کنید حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} ۲a & ۳b \\ ۲c & ۳d \end{vmatrix}$ بر ۴۲ بخش‌پذیر است.

شهریورماه۶۶

۱۱۳- معکوس یك ماتریس مثلثی را درحالت کلی حساب کنید وشرط معکوس‌پذیر بودن‌آن را بنویسید.

۱۱۴- مقادیر خاص و بردارهای خاص یك ماتریس قطری‌را درحالت کلی پیداکنید.

۱۱۵- مقادیرخاص یك ماتریس مثلثی را درحالت کلی پیداکنید.

۱۱۶- ثابت کنید مقادیرخاص عکس هر ماتریس معکوس مقادیرخاص خود ماتریس است.

۱۱۷- ثابت کنید مقادیرخاص ترانهادهٔ هر ماتریس مقادیرخاص خود ماتریس است.

۱۱۸- ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۷ & -۶ \\ -۱ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ مفروض است اولاً مقادیرخاص آن‌راحساب کنید. ثانیاً درستی رابطهٔ $A^n=۲A^{n-۱}+A^{n-۲}-۲A^{n-۳}$ را تحقیق کنید.

۱۱۹- اگر A و B دو ماتریس مربعی غیرصفر و $AB=\bar{o}$ ثابت کنید
$|A|=۰$ و $|B|=۰$

